

# Optimaler Beobachtungszeitraum in der Historischen Simulation

Freie wissenschaftliche Arbeit zur Erlangung des Abschlusses  
M.Sc. im Studienfach Statistik der Berliner Universitäten

eingereicht von: Thomas Bricke, 175803 (HU)

Erstgutachter: Professor Axel Werwatz, PhD

Zweitgutachter: Professor Dr. Wolfgang Härdle

Berlin, den 2. Mai 2019

## Zusammenfassung

Die Historische Simulation zählt zu den Standardverfahren der Marktpreisrisikomessung. Eine wesentliche Modellannahme ist dabei die Wahl des Beobachtungszeitraums, aus dem die Szenarien für die Risikomessung generiert werden. Die vorliegende Arbeit setzt dabei den Fokus auf die Zinsposition des sogenannten „gleitenden Zehners“, der als passive Fristentransformationsstrategie oder als Methode zur Eigenkapitalanlage Bedeutung hat. Zur Bestimmung des barwertorientierten Verlustrisikos wird für diese Position ein Index gebildet, für den ein geeignetes Volatilitätsmodell ermittelt wird. Durch Volatilitätsanalysen werden Phasen erhöhten Risikos identifiziert und Kandidaten für eine geeignete Parametrisierung der Beobachtungsperiode formuliert. Für diese Kandidaten erfolgt ein Modellvergleich auf Grundlage des Backtestings ihrer mittels Historischer Simulation ermittelten Risikowerte. Schließlich wird das zuvor gefundene Volatilitätsmodell verwendet, um alternative, fiktive Pfade der Datenhistorie zu simulieren. Auf dieser Grundlage werden die Kandidaten erneut einander gegenübergestellt, um eine optimale Wahl des Beobachtungszeitraums zu treffen.

Schlagwörter: Historische Simulation, Beobachtungszeitraum, Zeitfenster, Historie, Spiegelung

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abkürzungs- und Begriffsverzeichnis</b>	<b>iii</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>iv</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Voraussetzungen</b>	<b>2</b>
2.1 Aufsichtlicher Rahmen . . . . .	2
2.2 Definition der Musterbank: Zinsstrategie des „gleitenden Zehners“ . . . . .	3
<b>3 Daten</b>	<b>4</b>
3.1 Marktdaten: Zinssätze der EZB . . . . .	4
3.1.1 Methodik der EZB-Zinsen . . . . .	4
3.1.2 Datenabzug . . . . .	5
3.2 Datengrundlage für eine Zeitreihenanalyse . . . . .	6
3.2.1 Zinssätze als Datenbasis . . . . .	6
3.2.2 Parameter von Zinsstrukturmodellen . . . . .	7
3.2.3 Index für die Zinsposition des „gleitenden Zehners“ . . . . .	8
<b>4 Zeitreihenanalyse</b>	<b>9</b>
4.1 Theoretische Grundlage . . . . .	9
4.2 Modell für den GI10-Index . . . . .	13
4.3 Analyse der bedingten Volatilitätsschätzungen . . . . .	19
4.3.1 Gleitende Durchschnitte . . . . .	19
4.3.2 Volatilitätsclusteranalyse . . . . .	21
<b>5 Risikomodellvergleich</b>	<b>27</b>
5.1 Methode der Historischen Simulation . . . . .	27
5.2 Vorauswahl von Kandidatenmodellen . . . . .	33
5.3 Vergleichskriterien . . . . .	35
5.3.1 Vorüberlegungen . . . . .	35
5.3.2 Backtesting Value at Risk . . . . .	36
5.3.3 Backtesting Expected Shortfall . . . . .	38
5.4 Erwartungen an die Ergebnisse . . . . .	40
5.5 Auswertung historischer Daten . . . . .	42
5.6 Auswertung fiktiver, simulierter Pfade . . . . .	45
5.7 Nachbemerkung zur Definition des VaR . . . . .	49
<b>6 Schlussfolgerung</b>	<b>51</b>

<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>53</b>
A.1	Ergebnisse der Zeitreihenanalyse des GI10 . . . . .	53
A.1.1	Stationarität von Logpreisen und Logrenditen . . . . .	53
A.1.2	ARMA-Modell für die bedingten Erwartungen der Logrenditen . . . . .	53
A.1.3	ARMA+GARCH-Modell für die Logrenditen . . . . .	56
A.2	Ergebnisse der Analyse der bedingten Volatilitätsschätzungen . . . . .	61
A.2.1	Ansatz gleitender Durchschnitte . . . . .	61
A.2.2	CPM: serielle Abhängigkeiten der bedingten Volatilitätsschätzungen . . . . .	61
A.2.3	CPM: Verteilung der Logrenditen . . . . .	62
A.2.4	CPM: Ergebnisse der Volatilitätsclusterung . . . . .	62
A.3	Ergebnisse der Risikoberechnung und des Backtestings . . . . .	66
A.3.1	Methode Value at Risk und Expected Shortfall . . . . .	66
A.3.2	Value at Risk historischer Daten . . . . .	68
A.3.3	Expected Shortfall historischer Daten . . . . .	70
A.3.4	Value at Risk simulierter Daten . . . . .	71
<b>B</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>77</b>
<b>C</b>	<b>Implementierung</b>	<b>79</b>
<b>D</b>	<b>Selbstständigkeitserklärung</b>	<b>82</b>

## Abkürzungs- und Begriffsverzeichnis

<b>ACF</b>	Autokorrelationsfunktion .....	9
<b>ADF</b>	Augmented Dickey-Fuller-Test .....	10
<b>AIC</b>	Akaikes Informationskriterium .....	11
<b>AR</b>	Autoregressive .....	11
<b>ARCH</b>	Autoregressive Conditional Heteroskedastic .....	12
<b>ARMA</b>	Autoregressive Moving Average .....	11
<b>ARIMA</b>	integrierter ARMA .....	11
<b>BaFin</b>	Bundesanstalt für Finanzdienstleistungen .....	2
<b>BCBS</b>	Basler Ausschuss für Bankenaufsicht .....	2
<b>BIC</b>	Bayessches Informationskriterium .....	11
<b>BuBa</b>	Deutsche Bundesbank .....	2
<b>CPM</b>	Change Point Model .....	21
<b>ES</b>	Expected Shortfall .....	31
<b>EZB</b>	Europäische Zentralbank .....	4
<b>GARCH</b>	Generalized ARCH .....	12
<b>GI10</b>	Index für die Zinsposition des „gleitenden Zehners“ .....	8
<b>IQR</b>	Interquartilsabstand .....	24
<b>KPSS</b>	Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin-Test .....	10
<b>MA</b>	Moving Average .....	11
<b>OS</b>	ohne Spiegelung .....	29
<b>NSS</b>	Zinsstrukturmodell von Nelson-Siegel-Svensson .....	7
<b>RRK</b>	Risikoreagibilitätskriterium .....	35
<b>PACF</b>	partielle Autokorrelationsfunktion .....	9
<b>RS</b>	Renditenspiegelung .....	29
<b>VaR</b>	Value at Risk .....	31
<b>VS</b>	Verteilungsspiegelung .....	29

## Abbildungsverzeichnis

1	Historischer Verlauf der Zerobondrenditen . . . . .	6
2	Historischer Verlauf der Parameterschätzungen des NSS-Modells . . . . .	7
3	Historischer Verlauf des GI10-Index . . . . .	9
4	Logpreise und Logrenditen des GI10 . . . . .	14
5	ACF und PACF der Logrenditen des GI10 . . . . .	15
6	Quantil-Quantil-Diagramme der standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1)- Modells bei Normal- und Student-t-verteiltem Rauschen . . . . .	18
7	Zeitverlauf der bedingten Volatilitätsschätzung der Logrenditen des GI10 . . . . .	19
8	Anwendung gleitender Durchschnitte auf die bedingte Volatilitätsschätzung . . . . .	20
9	ACF und PACF der bedingten Volatilitätsschätzung . . . . .	22
10	Histogramm der Logrenditen des GI10 . . . . .	23
11	Kerndichteschätzung der Strukturbruchverteilung aus den Ergebnissen des CPM . . . .	24
12	Volatilitätsclusterung mittels CPM mit <code>cpmType=„Mood“</code> . . . . .	27
13	Perspektive zum Auswertungszeitpunkt der Risikoermittlung . . . . .	31
14	Verteilungsfunktion und Risikomessung in der Historischen Simulation . . . . .	32
15	Historische Risikowerte und Backtestingergebnisse . . . . .	43
16	ACF und PACF der Residuen und quadrierten Residuen des MA(1)-Modells ohne $\phi_0$ .	55
17	ACF und PACF der standardisierten und quadrierten standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne $\phi_0$ mit normalverteiltem Rauschen . . . . .	59
18	ACF und PACF der standardisierten und quadrierten standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne $\phi_0$ mit Student-t-verteiltem Rauschen . . . . .	59
19	ACF und PACF der standardisierten und quadrierten standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne $\phi_0$ mit normalverteiltem Rauschen (Stata) . . . .	60
20	ACF und PACF der standardisierten und quadrierten standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne $\phi_0$ mit Student-t-verteiltem Rauschen (Stata) . .	60
21	Volatilitätsclusterung mittels CPM mit verschiedenen Methoden . . . . .	65
22	Basler Ampelstatus simulierter Pfade zum Konfidenzniveau 99,9 % . . . . .	74
23	Basler Ampelstatus simulierter Pfade zum Konfidenzniveau 99,0 % . . . . .	74
24	Verteilung der p-Werte einseitiger Binomialtests zum VaR-Backtesting simulierter Pfa- de zum Konfidenzniveau 99,9 % . . . . .	75
25	Verteilung der p-Werte zweiseitiger Binomialtests zum VaR-Backtesting simulierter Pfade zum Konfidenzniveau 99,9 % . . . . .	75
26	Verteilung der p-Werte einseitiger Binomialtests zum VaR-Backtesting simulierter Pfa- de zum Konfidenzniveau 99,0 % . . . . .	76
27	Verteilung der p-Werte zweiseitiger Binomialtests zum VaR-Backtesting simulierter Pfade zum Konfidenzniveau 99,0 % . . . . .	76
28	EZB-Seite zur Bereitstellung der „Euro area yield curves“ . . . . .	79

## Tabellenverzeichnis

1	Abkürzungen in den Marktdaten der EZB . . . . .	5
2	Maximale Anzahl an VaR-Überschreitungen für den Basler Ampelstatus Grün bzw. Gelb in Abhängigkeit von Stichprobenumfang und Konfidenzniveau . . . . .	37
3	Erwartete optimale Beobachtungszeiträume . . . . .	41
4	Abstand zur erwarteten optimalen Parametrisierung für rollierende Beobachtungszeiträume bei alternativer Definition des VaR . . . . .	50
5	Ergebnisse von ADF-Test und KPSS-Test für Logpreise und Logrenditen des GI10 . .	53
6	Vergleich verschiedener ARMA-Modellschätzungen für die erwarteten Logrenditen . .	53
7	Vergleich von AIC und BIC der ARMA-Modellschätzungen für die erwarteten Logrenditen	53
8	p-Werte der Box-Ljung-Tests der Residuen der ARMA-Modellschätzungen für die erwarteten Logrenditen . . . . .	54
9	Ergebnisse der Box-Ljung-Tests der quadrierten Residuen des MA(1)-Modells ohne Konstante $\phi_0$ . . . . .	55
10	Schätzung des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne $\phi_0$ mit normalverteiltem Rauschen in R . . . . .	56
11	Schätzung des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne $\phi_0$ mit normalverteiltem Rauschen in Stata . . . . .	56
12	Schätzung des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne $\phi_0$ mit Student-t-verteiltem Rauschen in R . . . . .	56
13	Schätzung des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne $\phi_0$ mit Student-t-verteiltem Rauschen in Stata . . . . .	56
14	Ergebnisse der Box-Ljung-Tests der standardisierten und quadrierten standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1) ohne $\phi_0$ mit normalverteiltem Rauschen . . . . .	57
15	Ergebnisse der Box-Ljung-Tests der standardisierten und quadrierten standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1) ohne $\phi_0$ mit Student-t-verteiltem Rauschen . . .	58
16	Erwartungswert, Standardabweichung, Schiefe und Wölbung der standardisierten und quadrierten standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1) ohne $\phi_0$ . . . . .	58
17	Anhand gleitender Durchschnitte ermittelte unruhige Marktphasen und zeitliche Abstände der jeweiligen Höhepunkte . . . . .	61
18	Schätzung des AR(1)-Modells für die bedingte Volatilitätsschätzung . . . . .	61
19	ADF-Test und KPSS-Test für die bedingte Volatilitätsschätzung . . . . .	62
20	Erwartungswert, Standardabweichung, Schiefe und Wölbung der Logrenditen des GI10	62
21	Jarque-Bera-Test und Kolmogorow-Smirnow-Anpassungstest auf Normalität der Logrenditen des GI10 . . . . .	62
22	Ergebnisse des CPM für die Logrenditen des GI10 mit cpmType „Bartlett“ . . . . .	63
23	Ergebnisse des CPM für die Logrenditen des GI10 mit cpmType „GLR“ . . . . .	63
24	Ergebnisse des CPM für die Logrenditen des GI10 mit cpmType „Mood“ . . . . .	64
25	Ergebnisse des CPM für die Logrenditen des GI10 mit cpmType „Cramer-von-Mises“ .	64
26	Äquivalentes Level des ES zum VaR einer standardnormalverteilten Zufallsvariable zum Konfidenzniveau 99,9 % . . . . .	66

27	Äquivalentes Level des ES zum VaR einer Student-t-verteilten Zufallsvariable mit $\nu = 7,7$ Freiheitsgraden zum Konfidenzniveau 99,9 % . . . . .	66
28	Äquivalentes Level des ES zum VaR einer standardnormalverteilten Zufallsvariable zum Konfidenzniveau 99,0 % . . . . .	67
29	Äquivalentes Level des ES zum VaR einer Student-t-verteilten Zufallsvariable mit $\nu = 7,7$ Freiheitsgraden zum Konfidenzniveau 99,0 % . . . . .	67
30	Abstand zur erwarteten optimalen Parametrisierung für rollierende Beobachtungszeiträume . . . . .	67
31	Ergebnisse des historischen VaR-Backtesting zum Konfidenzniveau von 99,9 % . . . .	68
32	Ergebnisse des historischen VaR-Backtesting zum Konfidenzniveau von 99,0 % . . . .	69
33	Ergebnisse des historischen VaR-Backtesting zum Konfidenzniveau von 97,5 % . . . .	69
34	Ergebnisse des historischen ES-Backtestings zum Level von 99,0 % . . . . .	70
35	Ergebnisse des historischen ES-Backtestings zum Level von 97,5 % . . . . .	71
36	Ergebnisse des VaR-Backtestings simulierter Pfade zum Konfidenzniveau von 99,9 %	71
37	Ergebnisse des VaR-Backtestings simulierter Pfade zum Konfidenzniveau von 99,0 %	72
38	Vergleich der p-Werte der ein- und zweiseitigen Binomialtests simulierter Pfade sowie deren Vergleich zum Signifikanzniveau von 5 % . . . . .	73

# 1 Einleitung

Die Historische Simulation gehört zu den Standardverfahren der Marktpreisrisikomessung. Sie leitet die Szenarien möglicher Wertveränderungen zu einem Auswertungstichtag direkt aus den Beobachtungen der Datenhistorie ab. Ein zentraler Parameter dieses Modells ist daher die Länge der historischen Betrachtungsperiode, aus der die Szenarien generiert werden.

Für die Messung eines monetären Risikos sind wenige ungünstige Szenarien relevant. Je kürzer die Betrachtungsperiode gewählt wird, desto weniger Szenarien können daraus generiert werden. Zu wenige relevante Szenarien können die Validität der Risikowerte mindern. Auf der anderen Seite zieht eine zu lange Beobachtungsperiode historische Szenarien in Betracht, die für den aktuellen Stichtag mit zunehmendem Zeitabstand möglicherweise nicht mehr repräsentativ sind. Je länger die Beobachtungsperiode gewählt wird, desto aufwendiger wird die Datenhaltung, desto länger dauert die Berechnung der Historischen Simulation und desto träger reagiert das gemessene Marktpreisrisiko auf eintretende Ereignisse. Der historische Beobachtungszeitraum sollte also weder zu kurz noch zu lang sein. [Manganelli u. Engle \(2001\)](#) beschreiben den Gegenstand dieser Arbeit wie folgt:

„This [the length of the time window] is a very delicate issue, since forecasts of VaR under this approach [the Historical Simulation] are meaningful only if the historical data used in the calculations have (roughly) the same distribution. In practice, the volatility clustering period is not easy to identify. The length of the window must satisfy two contradictory properties: it must be large enough, in order to make statistical inference significant, and it must not be too large, to avoid the risk of taking observations outside of the current volatility cluster. Clearly, there is no easy solution to this problem.“<sup>1</sup>

In der folgenden Arbeit wird untersucht, wie der Beobachtungszeitraum der Historischen Simulation optimal zu parametrisieren ist. Als Voraussetzung werden in Kapitel 2 die aufsichtlichen Rahmenbedingungen geprüft und eine zu betrachtende Musterposition definiert, die das Bankbuch zahlreicher kleiner bis mittelgroßer mitteleuropäischer Kreditinstitute repräsentiert. In Kapitel 3 werden von der Europäischen Zentralbank (EZB) ermittelte und veröffentlichte Zinssätze als Datengrundlage vorgestellt und daraus ein Index für die zu betrachtende Musterposition definiert. Dieser Index wird in Kapitel 4 zum Gegenstand einer Zeitreihenanalyse und infolgedessen einer Volatilitätsanalyse. Aus diesen Betrachtungen wird der Rahmen geeigneter Beobachtungszeiträume abgeleitet, die dann in Kapitel 5 anhand der Ergebnisse der Risikoermittlung miteinander verglichen werden. Ergänzend zum Pfad der historischen Beobachtungen werden anhand des ermittelten Zeitreihenmodells fiktive Pfade simuliert, um die Analyse auf andere mögliche Marktphasen auszudehnen. Abschließend werden in Kapitel 6 die Ergebnisse zusammengefasst und daraus geschlussfolgert, wie der Beobachtungszeitraum der Historischen Simulation optimal zu parametrisieren ist.

<sup>1</sup>Vgl. Abschnitt 2.2 „Non-Parametric Models“, Seite 10, dritter Absatz in [Manganelli u. Engle \(2001\)](#).



## 2 Voraussetzungen

### 2.1 Aufsichtlicher Rahmen

Die Marktpreisrisikomessung im Kontext der Risikotragfähigkeitsanalyse ist für Kreditinstitute an aufsichtliche Rahmenbedingungen gebunden. Deutsche Aufsicht und Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (BCBS) geben dazu folgende Hinweise.

In ihrem Monatsbericht vom Oktober 1998 zählt die Deutsche Bundesbank (BuBa) die Historische Simulation neben dem Varianz-Kovarianz-Ansatz und der Monte-Carlo-Simulation zu den gebräuchlichsten Methoden zur Ermittlung von Marktpreisrisiken und sieht den Value at Risk (VaR) zum Konfidenzniveau von 99 % als Risikomaß vor.<sup>2</sup> Zum Gegenstand dieser Arbeit heißt es darin:

„Schließlich soll ein Beobachtungszeitraum von **mindestens einem Jahr (250 Handelstagen)** sicherstellen, daß bei der Verwendung der von historischen Marktdaten abgeleiteten Modellparameter, wie Sensitivitäten und Korrelationen, ein **ausreichend langer Zeitraum** zugrundegelegt wird, um die Modellberechnung auf der **Grundlage stabiler und repräsentativer Daten** durchführen zu können. Die Frage, welche historische Datenreihe für die Risikovoraussage am besten geeignet ist, kann **nicht allgemeingültig beantwortet** werden, weil dies **vom jeweiligen Portfolio abhängig** ist.“<sup>3</sup>

In Abgrenzung zu den auf Krisenszenarien basierenden Stresstests beruhe der VaR aber auf „normalen“ Marktgegebenheiten, während aus den Stresstests ersichtlich sein solle, welche Verluste in ungünstigen Marktkonstellationen schlimmstenfalls auftreten könnten.<sup>4</sup>

Die Güte der Risikomessung sei durch das Backtesting des VaR, d.h. den täglichen Vergleich der prognostizierten Risikowerte mit den tatsächlich eingetretenen Verlusten, zu beurteilen. Die BuBa beurteilt die Güte dabei desto schlechter, je häufiger der tatsächlich eingetretene Verlust größer ist als der errechnete VaR und bezieht sich dabei auf den „Baseler Ampelansatz“.<sup>5</sup>

Der BCBS bestätigt diese Rahmenbedingungen für interne Marktrisikomodelle der Säule I, wobei sie darin die Skalierung einer kürzeren Haltedauer auf eine längere (mindestens zehntägige) Haltedauer mittels Quadratwurzel ausdrücklich erlauben.<sup>6</sup>

Die Bundesanstalt für Finanzdienstleistungen (BaFin) fordert im Mai 2018, „die Risiken grundsätzlich rollierend über einen einheitlich langen künftigen Zeitraum zu ermitteln, der ein Jahr beträgt (Risikobetrachtungshorizont)“.<sup>7</sup> Zum historischen Beobachtungszeitraum heißt es:

„Fließen beobachtete Entwicklungen der Vergangenheit in die Risikoberechnung ein und beinhaltet der Beobachtungszeitraum ausschließlich oder überwiegend Zeiten geordneter und ruhiger Marktverhältnisse, so sind auch die **Auswirkungen von stärkeren Parameterveränderungen bei der Risikoermittlung angemessen zu berücksichtigen**,

<sup>2</sup>Vgl. Seite 71-73, Abschnitte „Wesensmerkmale von bankinternen Risikosteuerungsmodellen“ und „Die bankaufsichtliche Eignung bankinterner Risikosteuerungsmodelle“ in [Deutsche Bundesbank \(1998\)](#).

<sup>3</sup>Vgl. Seite 73, Absatz 3 in [Deutsche Bundesbank \(1998\)](#).

<sup>4</sup>Vgl. Seite 73/74, Abschnitt „Streß-Tests“ in [Deutsche Bundesbank \(1998\)](#).

<sup>5</sup>Vgl. Seite 74, Abschnitt „Backtesting“ in [Deutsche Bundesbank \(1998\)](#) bzw. Tabelle 1 in [BCBS \(1996\)](#).

<sup>6</sup>Vgl. Seite 222, Abschnitt VI.D.4 „Marktrisiko – Der auf internen Modellen basierende Ansatz – Quantitative Anforderungen“ in [BCBS \(2006\)](#).

<sup>7</sup>Vgl. Seite 16, Abschnitt „5.3.2. Weiterführende Hinweise zur Risikoquantifizierung“, Absatz 50 in [BaFin \(2018a\)](#).

wenn diese für den in der Risikotragfähigkeitsbetrachtung angenommenen Risikohorizont nicht auszuschließen sind.“<sup>8</sup>

Schließlich ergänzt die BaFin, dass das **Konfidenzniveau des Risikoansatzes 99,9 %** entsprechen und **zwischen den verschiedenen Risikoarten konsistent** sein solle.<sup>9</sup>

**Fazit:** Der aufsichtliche Rahmen für die historische Betrachtungsperiode ist also noch recht weit gefasst. Die Wahl dieses Parameters ist abhängig von der zu betrachtenden Position und insbesondere im Hinblick auf die Güte der Risikomessung zu treffen.

## 2.2 Definition der Musterbank: Zinsstrategie des „gleitenden Zehners“

Als Grundlage der weiteren Betrachtungen dieser Arbeit sei eine Musterbank definiert, die im Wesentlichen durch die Zinsposition eines sogenannten „gleitenden Zehners“ charakterisiert sei. Diese Zinsposition ist gegeben durch eine auf die Laufzeiten bis zehn Jahre gleichmäßig verteilte Zinsbindungsbilanz. Die **Definition der Musterbank** beruhe dabei auf folgenden Annahmen:

- Die Zinsbindungsbilanz folge einem „gleitenden Zehner“. Eine solche Position entsteht z.B., wenn das Kreditinstitut Zinsänderungsrisiken aus dem Bankgeschäft im Rahmen seiner Aktiv-Passiv-Steuerung aussteuert und sein Eigenkapital gemäß dieser Strategie anlegt.
- Die Zinsposition des „gleitenden Zehners“ sei „risikolos“, d.h. (so weit möglich) frei von Adressrisiken. Diese Annahme ist legitim, wenn die Zinsposition z.B. durch Zinsderivate, für die entsprechende Sicherungsmechanismen<sup>10</sup> bestehen, oder durch Staatsanleihen bester Bonität dargestellt wird.
- Eventuelle Fremdwährungsrisiken seien ausgesteuert.
- Kursrisiken, z.B. aus Aktien- oder Rohstoffrisiken, seien nicht gegeben oder ausgesteuert.

Die aus diesen Annahmen resultierende Musterbank entspricht der Definition der Musterbank in Rubin u. a. (2018),

„die sich aus dem Durchschnitt der 100 grössten Schweizer Retailbanken ableitet [...] Es wird angenommen, dass die Musterbank eine Fristentransformation in Höhe einer  $1.0 \times 10^J$  gleitenden Zinsrisikostrategie fährt, was dem durchschnittlichen Zinsrisikorexposure eines Benchmark-Sample entspricht.“<sup>11</sup>

Quellen für die Zusammenstellung des Benchmark-Samples seien Offenlegungsberichte. Der gleitende Zehner werde dabei „operativ [...] üblicherweise gesteuert, indem das Eigenkapital zu 100 % über zehn Jahre ausgerollt wird und darüber hinaus alle Laufzeit-Gaps geschlossen werden.“<sup>11</sup> Es

<sup>8</sup>Vgl. Seite 17, Abschnitt „5.3.2. Weiterführende Hinweise zur Risikoquantifizierung“, Absatz 60 in BaFin (2018a).

<sup>9</sup>Vgl. Seite 17, Abschnitt „5.3.2. Weiterführende Hinweise zur Risikoquantifizierung“, Absatz 61 in BaFin (2018a).

<sup>10</sup>Z.B. durch ein Clearing oder durch Collateralvereinbarungen.

<sup>11</sup>Vgl. Abschnitt 1.1 „Ursachen für den Rückgang der Zinsspanne und Konsequenzen“ inkl. dazugehöriger Fußnoten auf S. 8 in Rubin u. a. (2018).

handelt sich bei dem gleitenden Zehner also, insbesondere aus Sicht eines kleinen bis mittelgroßen mitteleuropäischen Kreditinstituts, um ein typisches Musterportfolio.<sup>12</sup>

Die deutsche Aufsicht fordert, dass eine aus Steuerungsgesichtspunkten durch die Eigenkapitalanlage entstehende Ablauffiktion nicht in die Marktpreisrisikoberechnung einbezogen werden darf:

„Eigenkapitalbestandteile, die dem Institut zeitlich unbegrenzt zur Verfügung stehen, dürfen nicht in die barwertige Ermittlung der Zinsänderungsrisiken einbezogen werden.“<sup>13</sup>

Aus der Eigenkapitalanlage entsteht aus Sicht einer Zinsänderungsrisikoermittlung also eine offene Zinsposition. Das Risikoprofil der im Folgenden zu betrachtenden Musterbank besteht also summa summarum aus einer (adress-)risikolosen, gleitend zehnjährigen Zinsposition.

### 3 Daten

Wie aus Abschnitt 2.1 hervorgeht, ist der Beobachtungszeitraum in Abhängigkeit der Positionierung zu treffen. Dafür wird in Abschnitt 2.2 die Position einer Musterbank definiert, deren Marktpreisrisiko insbesondere ein Zinsänderungsrisiko darstellt. In diesem Kapitel wird die Datengrundlage für die weiteren Analysen diskutiert.

#### 3.1 Marktdaten: Zinssätze der EZB

Zur Bewertung der Position der Musterbank werden Zinssätze mit Laufzeiten bis zu zehn Jahren benötigt. Von der EZB werden entsprechende Zinsen täglich ermittelt und öffentlich bereitgestellt.<sup>14</sup>

##### 3.1.1 Methodik der EZB-Zinsen

Die Methodik der bereitgestellten Daten werden in Kürze in einem Artikel ihres monatlichen Bulletins bzw. ausführlich in einer Ausgabe ihrer „Statistics Paper Series“ beschrieben.<sup>15</sup> Sie lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die Europäische Zentralbank (EZB) ermittelt Zinsstrukturen<sup>16</sup> aus Kursen von Staatsanleihen, die von Zentralregierungen der Eurozone emittiert werden, aktiv gehandelt sowie festverzinslich sind und endliche Laufzeit haben.
- Sie stellt an Bankarbeitstagen (gemäß TARGET-Kalender) täglich um 12 Uhr MEZ je zwei Datensätze bereit: Renditen auf Basis von (durch Fitch) AAA-gerateten Anleihen und Renditen ohne Einschränkung nach Ratings.

<sup>12</sup>Vgl. z.B. Sparkasse Westmünsterland (2017): „Zur Beurteilung des Zinsänderungsrisikos orientiert sich die Sparkasse an einer definierten Benchmark (angelehnt an die Struktur des gleitenden 10-Jahresdurchschnitts). Abweichungen zeigen ggf. Bedarf von Steuerungsmaßnahmen auf und dienen als zusätzliche Information für zu tätige Neuanlagen.“

<sup>13</sup>Vgl. Abschnitt 4 „Auswertung der Zinsänderungsszenarien“ in BaFin (2018b).

<sup>14</sup>Die Daten sind verfügbar unter [https://www.ecb.europa.eu/stats/financial\\_markets\\_and\\_interest\\_rates/euro\\_area\\_yield\\_curves/html/index.en.html](https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html).

<sup>15</sup>Vgl. EZB (2008) bzw. Nyman-Andersen (2018).

<sup>16</sup>Vgl. Abschnitt 2.1.5 „Spot Rates“ in Deutsch (2008): Zinsstrukturen bestehen aus Spot Rates, welche als Renditen tatsächlicher oder synthetischer Nullkuponanleihen entsprechender Laufzeit ermittelt werden. Synonym werden sie deshalb auch als Zerobondrenditen bezeichnet.

- Aus den Zerobondrenditen ermittelt die EZB dann Parrenditen und Terminzinsen.<sup>17</sup>
- Die Daten sind historisch verfügbar seit dem 06.09.2004.
- Die Laufzeiten reichen von drei Monaten bis dreißig Jahren.
- Ausreißer werden bereinigt.

Die AAA-gerateten Zerobondrenditen sind für Analysen bezüglich der in Abschnitt 2.2 beschriebenen Musterbank geeignet, da sie die bestmögliche (adress-)risikolose Eurozinsstruktur darstellen. Durch die Bereitstellung von Zerobondrenditen lassen sich außerdem die Diskontfaktoren<sup>18</sup> einfach und ohne vorherige Umrechnung<sup>19</sup> ermitteln.

In den täglichen Datensätzen lassen sich die relevanten Spot Rates aus dem Feld DATA\_TYPE\_FM erkennen. Die Bedeutung der darin von der EZB verwendeten Namen bzw. Namenspräfixe lässt sich aus dem Feld TITLE entnehmen.<sup>20</sup> Die ebenfalls in dem Datensatz bereitgestellten Werte der Datentypen BETA0, BETA1, BETA2, BETA3, TAU1 und TAU2 sind die Parameterschätzungen des Zinsstrukturmodells von Nelson, Siegel und Svensson.<sup>21</sup>

DATA_TYPE_FM	Bedeutung
SR_*	Spot rate, synonym auch Zerobondrendite
PY_*	Par yield curve rate: aus den Zerobondrenditen ermittelte Parrendite
IF_*	Instantaneous forward rate: aus den Zerobondrenditen ermittelter Terminzins
SRS_*	Spread: Spanne zwischen den Laufzeiten, Maß für Steilheit der Zinsstruktur

**Tabelle 1:** Beschreibung der in den Datensätzen der EZB verwendeten Abkürzungen

### 3.1.2 Datenabzug

Die Renditen AAA-gerateter europäischer Staatsanleihen werden in zwei Abschnitten bereitgestellt:<sup>22</sup>

- Historische Zinssätze bis zum Vorjahresultimo („All years - AAA“): Diese Daten wurden am 04.01.2019 um 13:13 Uhr heruntergeladen und enthalten Zinssätze von 3664 Stichtagen zwischen dem 06.09.2004 und dem 28.12.2018.
- Zinssätze des aktuell laufenden Kalenderjahres bis zum aktuellen Stichtag („Current year - AAA“): Diese Daten wurden am 30.03.2019 um 14:19 Uhr heruntergeladen und enthalten Zinssätze von 62 Stichtagen zwischen dem 02.01.2019 und dem 28.03.2019.

Zusammengenommen liegen damit Zinssätze für 3726 Stichtage vor. Bei Plausibilitätskontrollen wird ein Stichtag mit unveränderten Zinsen<sup>23</sup> aus der weiteren Verarbeitung ausgeschlossen, so dass ins-

<sup>17</sup>Das sogenannte „Bootstrapping“ (vgl. Abschnitt 28.1 in Deutsch (2008)) wird normalerweise genutzt, um Spot Rates aus beobachteten Parrenditen zu gewinnen. Das Verfahren lässt sich jedoch auch umkehren.

<sup>18</sup>Ein Diskontfaktor versteht sich als Preis einer Nullkuponanleihe. Er kann direkt aus den Zerobondrenditen ermittelt werden und wird auch als Zerobondabzinsungsfaktor bezeichnet.

<sup>19</sup>Die ggf. notwendige Umrechnung von Par- in Zerobondrenditen erfolgt durch ein sogenanntes „Bootstrapping“-Verfahren, vgl. Abschnitt 2.1.3 „Diskontfaktoren“ bzw. Abschnitt 28.1 in Deutsch (2008).

<sup>20</sup>Vgl. Tabelle 1 in diesem Abschnitt.

<sup>21</sup>Vgl. Svensson (1994) bzw. Abschnitt 3.2.2 dieser Arbeit.

<sup>22</sup>Siehe Fußnote 14 in diesem Kapitel.

<sup>23</sup>Dabei handelt es sich um Mittwoch, den 08.10.2008, einen regulären Handelstag. Eine diesbezügliche Anfrage bei der EZB ist bis dato unbeantwortet.

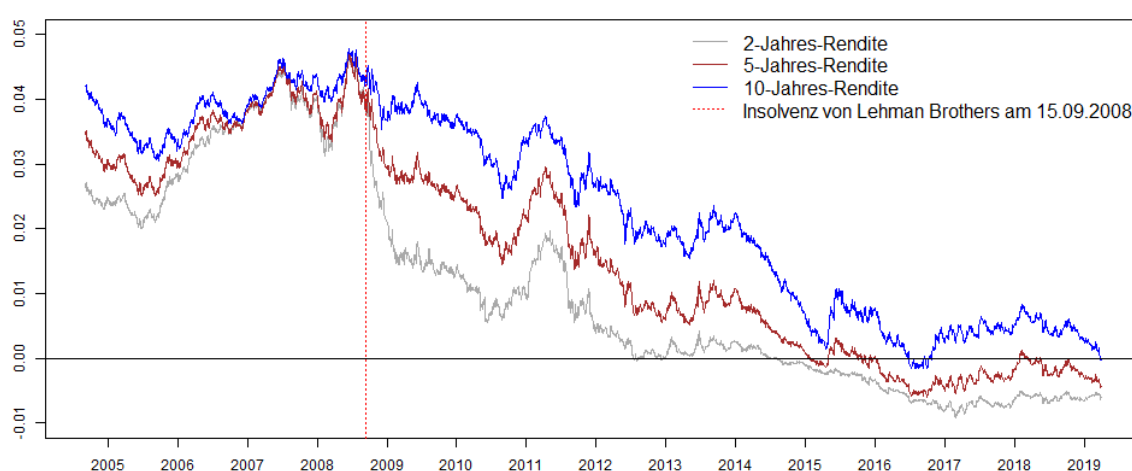
gesamt Zinssätze für 3725 Stichtage zwischen dem 06.09.2004 und dem 12.03.2019 zur Verfügung stehen.

## 3.2 Datengrundlage für eine Zeitreihenanalyse

Der Fragestellung nach dem historischen Beobachtungszeitraum wird sich mit Hilfe der Analyse einer relevanten Zeitreihe angenähert. Davor ist zunächst die Frage zu beantworten, welche Daten eigentlich eine geeignete Grundlage dafür bieten.

### 3.2.1 Zinssätze als Datenbasis

Die für das Marktpreisrisiko der Musterbank relevanten Risikofaktoren sind insbesondere die Zinssätze bis einschließlich zehn Jahre. Diese unmittelbar als Datengrundlage zu verwenden, böte sich zunächst intuitiv an.



**Abbildung 1:** Historischer Verlauf der Zerobondrenditen aus Abschnitt 3.1

Bei der Betrachtung des zeitlichen Verlaufs verschiedener Zinssätze in Abbildung 1 ist ein Abwärtstrend erkennbar, insbesondere im Zusammenhang mit der Finanzmarktkrise und ihren Folgen. Im Zuge dessen wurden sogar negative Zinsniveaus erreicht. Trotz dieser früher schwer für möglich gehaltenen Entwicklung stellt sich die Frage, inwieweit der Wertebereich von Zinssätzen nicht doch nach unten beschränkt ist.<sup>24</sup> Ein Modell, das einen – deterministischen oder stochastischen – Trend annimmt, verträgt sich jedoch möglicherweise nicht mit einer solchen Grenze.

Negative Niveaus schränken zudem die Möglichkeiten für ein geeignetes Modell ein. So ist z.B. die Betrachtung von Quadratwurzeln oder Logarithmen nicht mehr gestattet.<sup>25</sup>

Bei einer Analyse der Zinssätze selbst liegt außerdem eine mehrdimensionale Zeitreihe vor. Je mehr Laufzeiten dabei in Betracht gezogen werden, desto höher fällt die Dimensionalität aus und desto

<sup>24</sup>Insbesondere wäre eine Rendite von -100 % gleichbedeutend mit einem sicheren Totalverlust für den Anleger bei „risikoloser“ Anlage. Werte kleiner oder gleich -100 % sind also unrealistisch.

<sup>25</sup>Zum Beispiel funktionieren die Zinsmodelle nach Cox-Ingersoll-Ross bzw. Black-Karasinski in diesem Umfeld nicht mehr, vgl. hierzu Abschnitt 10.4.1 in [Franke u. a. \(2011\)](#).

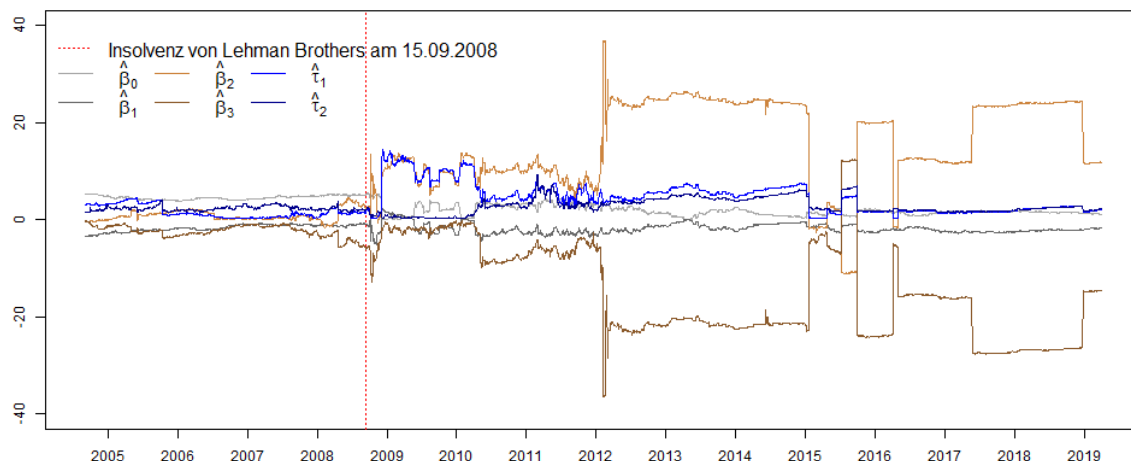
mehr Parameter müssen geschätzt werden. Um diesem Problem zu begegnen, werden im Folgenden andere mögliche Datengrundlagen für eine Zeitreihenanalyse diskutiert.

### 3.2.2 Parameter von Zinsstrukturmodellen

Eine Möglichkeit der Dimensionsreduktion besteht in der Betrachtung von Zinsstrukturmodellen. Hier soll exemplarisch das Svensson-Modell, eine Erweiterung des Nelson-Siegel-Modells und auch als Zinsstrukturmodell von Nelson-Siegel-Svensson (NSS) bezeichnet, betrachtet werden. Andere polynomiale und parametrische Modelle werden diesem von der EZB gegenübergestellt und diskutiert, aber letzten Endes wird das NSS-Modell von ihr bevorzugt und dessen Parameter täglich von ihr geschätzt.<sup>26</sup> Es ist gegeben durch<sup>27</sup>

$$y(m) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left[ \frac{1 - \exp(-m/\tau_1)}{m/\tau_1} \right] + \beta_2 \cdot \left[ \frac{1 - \exp(-m/\tau_1)}{m/\tau_1} - \exp(-m/\tau_1) \right] + \beta_3 \cdot \left[ \frac{1 - \exp(-m/\tau_2)}{m/\tau_2} - \exp(-m/\tau_2) \right].$$

Dabei bezeichne  $y(m)$  die Zerobondrendite zur Laufzeit  $m$ . Durch die (handels-)tägliche Beobachtung von Renditen der Laufzeiten  $m_1, \dots, m_T$  gibt es also  $T$  Gleichungen für die Schätzung der Parameter  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  und  $\beta_3$  sowie  $\tau_1$  und  $\tau_2$ . Nebenbedingungen an die Parameter sowie deren Interpretation finden sich in [Gilli u. a. \(2010\)](#).<sup>28</sup>



**Abbildung 2:** Historischer Verlauf der durch die EZB geschätzten Parameter des NSS-Modells

Das Zinsstrukturmodell von Nelson-Siegel-Svensson bildet die gesamte Zinsstruktur eines Stich-tags also mit Hilfe von sechs Parametern ab, d.h. es handelt sich bei den NSS-Parametern um eine immer noch sechsdimensionale Zeitreihe. Dabei zeigen die Parameterschätzungen im Zeitverlauf in

<sup>26</sup>Vgl. [Nyman-Andersen \(2018\)](#) sowie [EZB \(2008\)](#).

<sup>27</sup>Vgl. Gleichung (3.3) in [Svensson \(1994\)](#).

<sup>28</sup>Siehe Abschnitt 2 „Models and estimation“ in [Gilli u. a. \(2010\)](#).

Abbildung 2 modellbedingte Unstetigkeiten, so dass es schwierig würde, ein geeignetes Modell für eine solche Zeitreihe zu finden.

„In certain ranges of the parameters, the model is badly conditioned, thus estimated parameters are unstable given small perturbations of the data.“<sup>29</sup>

Der Fokus der folgenden Betrachtungen liegt einerseits nicht auf der gesamten Zinsstruktur, sondern insbesondere auf den relevanten Laufzeiten der Musterbank,<sup>30</sup> während die NSS-Parameter aber die gesamte Zinsstruktur reflektieren. Andererseits handelt es sich hierbei noch immer um eine mehrdimensionale Zeitreihe.

### 3.2.3 Index für die Zinsposition des „gleitenden Zehners“

Der Zinsindex Bund-Future<sup>31</sup> spiegelt den Wert einer fiktiven Bundesanleihe mit einer sechsprozentigen Verzinsung und einer konstanten Restlaufzeit von zehn Jahren wider. Hierbei handelt es sich um eine univariate Zeitreihe, die die gesamte Zinsstruktur der Laufzeit des Grundgeschäfts, entsprechend der Bedeutung der jeweiligen Stützstellen für die Bewertung, reflektiert. Analog dazu gibt es Indizes für den Schatz-Future mit zweijährigem und den Bobl-Future mit fünfjährigem Grundgeschäft. Alle drei Indizes passen zwar nicht genau auf das Risikoprofil der Musterbank aus Abschnitt 2.2, aber die ihnen zu Grunde liegende Idee lässt sich dafür adaptieren. Dementsprechend sei der **Index für die Zinsposition des „gleitenden Zehners“ (GI10)** definiert:

- Als fiktives Grundgeschäft wird das Zinsprofil des „gleitenden Zehners“ mit zehn jährlich fälligen Zahlungen mit konstanten Restlaufzeiten zu Grunde gelegt.
- Für jeden Stichtag der Datenhistorie wird das rollierende Grundgeschäft bewertet, d.h. die Zahlungsstruktur des „gleitenden Zehners“ wird auf den Bewertungsstichtag diskontiert.
- Die Zeitreihe des Barwertverlaufs wird durch den Barwert zum ersten Stichtag auf 100 % normiert. Die (einheitliche) Höhe der Zahlungen des „gleitenden Zehners“ kürzt sich durch die Normierung wieder heraus und spielt damit für die Berechnung des Indizes keine Rolle.

Daraus ergibt sich eine für das Risikoprofil unserer Musterbank passende, univariate Zeitreihe. Der Wertebereich des GI10 sind die positiven reellen Zahlen, was dessen Logarithmierung und damit die Betrachtung von Logrenditen erlaubt. Der GI10 soll damit im Folgenden die Grundlage einer Zeitreihenanalyse sein.

<sup>29</sup>Vgl. Einleitung in [Gilli u. a. \(2010\)](#).

<sup>30</sup>Dabei wächst die Zinssensitivität mit wachsender Laufzeit, vgl. dazu Gleichung (5.11) in [Deutsch \(2008\)](#).

<sup>31</sup>Es handelt sich dabei um eine Zusammensetzung der Preise von Bund-Future-Kontrakten unterschiedlicher Laufzeiten zu einem Index ohne Laufzeitende.



**Abbildung 3:** Historischer Verlauf des Index für die Zinsposition des „gleitenden Zehners“ (G10)

## 4 Zeitreihenanalyse

In Kapitel 3 wird der G10 als Gegenstand weiterer Betrachtung identifiziert. Im folgenden Kapitel wird zuerst ein geeignetes Zeitreihenmodell für diesen Index ermittelt, um anschließend den Verlauf von dessen Volatilität zu analysieren.

### 4.1 Theoretische Grundlage

Im folgenden Abschnitt werden für das weitere Vorgehen wichtige Grundbegriffe der Zeitreihenanalyse aus dem 2. Kapitel „Linear Time Series Analysis and Its Applications“ aus [Tsay \(2002\)](#) kurz zusammengefasst und die später verwendeten Zeitreihenmodelle definiert.

**Begriffe:** Stationarität, (partielle) Autokorrelationsfunktion

Eine Zeitreihe  $(r_t)_{t \in \mathbb{N}}$  heißt *schwach stationär*, falls sie einen konstanten Erwartungswert hat und ihre Autokovarianz zeitunabhängig ist, d.h. falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1.  $E[r_t] = \mu \in \mathbb{R}$ .
2.  $Cov[r_t, r_{t-l}] = \gamma_l$  für alle  $t > l$  mit  $l \in \mathbb{N}$ .

Die *Autokorrelation mit Zeitversatz*  $l \in \mathbb{N}$  einer schwach stationären Zeitreihe  $(r_t)_{t \in \mathbb{N}}$  ist gegeben durch  $\rho_l = \gamma_l / \gamma_0 = Cov[r_t, r_{t-l}] / Var[r_t]$ . Die *partielle Autokorrelation mit Zeitversatz*  $l \in \mathbb{N}$  wird dagegen durch eine Regressionen von  $r_t$  auf seine eigene Vergangenheit mit den Regressoren  $r_{t-1}, \dots, r_{t-l}$  ermittelt und entspricht in der Autoregressionsgleichung

$$r_t = \phi_{0,l} + \phi_{1,l}r_{t-1} + \dots + \phi_{l,l}r_{t-l} + \varepsilon_{lt}$$

dem Koeffizienten  $\phi_{l,l}$ . Die Autokorrelationsfunktion (ACF) bzw. partielle Autokorrelationsfunktion (PACF) ist dann eine Funktion der (partiellen) Autokorrelationen mit variablem Zeitversatz  $l \in \mathbb{N}$ .



**Begriff:** Portmanteau-Test auf Autokorrelationen

Portmanteau-Tests dienen der Überprüfung einer Zeitreihe auf Autokorrelationen, wobei jeweils  $h \in \mathbb{N}$  Zeitabstände gemeinsam getestet werden.<sup>32</sup> Die Nullhypothese lautet:  $H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_h = 0$ . Dementsprechend lautet die Alternativhypothese:  $H_1 : \rho_i \neq 0$  für ein  $i \in \{1, \dots, h\}$ . Die in dieser Arbeit verwendete – von Ljung und Box modifizierte – Teststatistik ist gegeben durch

$$Q(h) = T(T+2) \sum_{l=1}^h \frac{\hat{\rho}_l^2}{T-l}, \quad (1)$$

wobei  $T$  die Stichprobengröße,  $h$  die Anzahl der getesteten Zeitabstände und  $\hat{\rho}_l$  die Stichprobenautokorrelationen bezeichne. Unter der Nullhypothese ist die Teststatistik asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt, d.h.  $Q(h) \sim \chi_{(h)}^2$ .

**Begriffe:** Stochastischer Trend, Differenzstationarität, Einheitswurzeltests

Kursdaten von Finanzmärkten, z.B. Wechselkurse oder Aktienpreise, können im Allgemeinen nicht als stationär angenommen werden, da sie im Allgemeinen kein festes oder deterministisch bestimmbares Niveau haben, sondern sich „zufällig“ in eine Richtung entwickeln. Hat ein Prozess eine sogenannte „Einheitswurzel“, d.h. ist 1 eine Nullstelle seines charakteristischen Polynoms, so wird von einem *stochastischen Trend* gesprochen, der durch *Differenzieren* der Zeitreihe eliminiert werden kann:

„In finance, price series are commonly believed to be nonstationary, but the log return series,  $r_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1})$ , is stationary. In this case, the log price series is unit-root nonstationary and hence can be treated as an ARIMA process. The idea of transforming a nonstationary series into a stationary one by considering its change series is called *differencing* in the time series literature.“<sup>33</sup>

*Differenzstationarität* liegt vor, wenn sich durch Differenzieren eine stationäre Zeitreihe erreichen lässt. Bei bestimmten Zeitreihen kann es notwendig sein, mehrmals zu differenzieren, um eine stationäre Zeitreihe zu erhalten. Einmaliges Differenzieren der Logpreise  $\ln(p_t)$  liefert die Logrenditen  $r_t$ .

„There is a wide consensus that (log) speculative prices are nonstationary and, more precisely, show dynamic properties in line with processes that are integrated of order one.“<sup>34</sup>

Die Existenz von Einheitswurzeln und damit eines stochastischen Trends lässt sich zum Beispiel mittels Augmented Dickey-Fuller-Test (ADF) oder Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin-Test (KPSS) testen.<sup>35</sup> Das Hypothesenpaar des ADF-Tests lautet:

$$\begin{aligned} H_0 : & \quad \text{Existenz einer Einheitswurzel} \\ H_1 : & \quad \text{(Trend-)Stationarität} \end{aligned}$$

Für den KPSS-Test kehrt sich das Hypothesenpaar dagegen um.

<sup>32</sup>Vgl. im Folgenden Absatz „Portmanteau Test“ im Abschnitt 2.2 „Correlation and Autocorrelation Function“ in Tsay (2002).

<sup>33</sup>Vgl. Abschnitt 2.7.3 „General Unit-Root Nonstationary Models“, zweiter Absatz „Differencing“ in Tsay (2002).

<sup>34</sup>Vgl. Abschnitt 5.1 „Stylized Facts of Empirical Price Processes“, erster Absatz in Lütkepohl u. Krätzig (2004).

<sup>35</sup>Vgl. Abschnitt 2.7.1 bzw. 2.7.4 in Lütkepohl u. Krätzig (2004).

**Definition:** Modelle  $\text{ARMA}(p, q)$ ,  $\text{ARIMA}(p, d, q)$ ,  $\text{AR}(p)$ ,  $\text{MA}(q)$

Ein stochastischer Prozess  $(r_t)_{t \in \mathbb{N}}$  folge einem Autoregressive Moving Average (ARMA)-Modell der Ordnung  $(p, q)$ , kurz  $\text{ARMA}(p, q)$ -Modell, falls er gegeben ist durch

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j}, \quad (2)$$

wobei  $p, q \in \mathbb{N}_0$ ,  $\phi_i \in \mathbb{R}$  für  $i = 0, \dots, p$  und  $\theta_j \in \mathbb{R}$  für  $j = 1, \dots, q$  sowie  $(a_t)_{t \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und endlicher Varianz seien.<sup>36</sup> Ein stochastischer Prozess  $y_t$  heiße integrierter ARMA (ARIMA), kurz  $\text{ARIMA}(p, d, q)$ , falls der  $d$ -malig differenzierte Prozess  $r_t = \Delta^d y_t$  einem  $\text{ARMA}(p, q)$ -Modell folgt.<sup>37</sup> Reine Autoregressive (AR)- bzw. reine Moving Average (MA)-Modelle, bezeichnet als  $\text{AR}(p)$  bzw.  $\text{MA}(q)$ , sind Spezialfälle des  $\text{ARMA}(p, q)$ -Modells mit  $q = 0$  bzw.  $p = 0$ .

**Begriff:** Modellauswahlkriterien

Zum Vergleich geeigneter ARMA-Modelle dienen sogenannte Informationskriterien. Im Gegensatz zur Definition (2.13) in Tsay (2002) wird dabei jedoch nicht durch den Stichprobenumfang  $T$  geteilt, sondern die den entsprechenden Funktionen des R-Pakets stats zu Grunde liegenden Definitionen verwendet. Akaikes Informationskriterium (AIC) sei gegeben als

$$AIC = -2 \cdot \ln(\hat{L}) + 2 \cdot k, \quad (3)$$

wobei  $k$  die Anzahl der zu schtzenden Parameter und  $\hat{L}$  das geschtzte Maximum der Likelihood-Funktion des Modells bezeichne. Ein höherer Wert der Likelihood-Funktion soll belohnt, die Komplexität des Modells in Form der Anzahl an Parametern dagegen bestraft werden, um eine Überanpassung des Modells an die Daten zu vermeiden. Beim Vergleich geeigneter Modelle sollte also das kleinere AIC von Vorteil sein. Analog dazu ist das Schwarz-Kriterium, auch als Bayessches Informationskriterium (BIC) bezeichnet, zu verstehen. Hier wird der „Strafterm“ für die verwendeten Parameter  $2k$  aus dem AIC durch den vom Stichprobenumfang  $T$  abhängigen Term  $k \cdot \ln(T)$  ersetzt:

$$BIC = -2 \cdot \ln(\hat{L}) + k \cdot \ln(T). \quad (4)$$

**Motivation:** Einführung von Volatilittsmodellen

Es gehört zu den empirisch beobachteten Tatsachen, dass Volatilitäten an Finanzmärkten serielle Abhängigkeiten aufweisen:<sup>38</sup>

„Given nonstationarity of actual price processes, the statistical analysis mostly concentrates on speculative returns. Changes of (log) prices (compounded returns) are typically not, or at most weakly, autocorrelated [Campbell et al. (1997)]. Measured at some higher frequency, daily price variations, for example, exhibit positive autocorrelation. Periods of higher and smaller price variations alternate; empirical volatilities tend to cluster. [...] Yet,

<sup>36</sup>Vgl. Abschnitt 2.3, Absatz 1 „White Noise“ bzw. Abschnitt 2.6.2 „General ARMA Models“ in Tsay (2002).

<sup>37</sup>Vgl. Abschnitt 2.3.3 in Lütkepohl u. Krätzig (2004).

<sup>38</sup>Vgl. Abschnitt 5.1 „Stylized Facts of Empirical Price Processes“, zweiter Absatz in Lütkepohl u. Krätzig (2004).

the phenomenon of time-varying volatility is well known and has generated a vast body of econometric literature [...] introducing the (generalized) autoregressive conditionally heteroskedastic ((G)ARCH) process and the stochastic volatility model, respectively.“

Die der weiteren Analyse zu Grunde liegende Modellstruktur folgt in Aufbau und Notation [Tsay \(2002\)](#).<sup>39</sup> Betrachtet wird dabei der Prozess der Logrenditen  $(r_t)_{t \in \mathbb{N}}$  eines Grundgeschäfts. Die Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  spiegele alle zum jeweiligen Zeitpunkt  $t$  verfügbaren (Preis-)Informationen wider. Gegeben der zum Zeitpunkt  $t - 1$  bekannten (Preis-)Informationen sind bedingter Erwartungswert und bedingte Varianz der Logrendite  $r_t$  gegeben durch:

$$\mu_t = E[r_t | \mathcal{F}_{t-1}], \quad \sigma_t^2 = Var[r_t | \mathcal{F}_{t-1}] = E[(r_t - \mu_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]. \quad (5)$$

Da Logrenditen empirisch geringe bis keine seriellen Korrelationen aufweisen, wird angenommen, dass sie einem stationären ARMA-Prozess folgen, d.h. aus den Gleichungen (2) und (5) folgt mit obiger Notation:

$$r_t = \mu_t + a_t, \quad \mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j}. \quad (6)$$

Die um ihren (bedingten) Erwartungswert korrigierten Logrenditen  $a_t = r_t - \mu_t$  haben einen Erwartungswert von Null, woraus folgt:

$$\sigma_t^2 = Var[r_t | \mathcal{F}_{t-1}] = E[(r_t - \mu_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = E[a_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = Var[a_t | \mathcal{F}_{t-1}]. \quad (7)$$

Zur Abbildung einer zeitabhängigen bedingten Volatilität wird das Generalized ARCH (GARCH)-Modell eingeführt:

**Definition:** GARCH( $m, s$ )- und ARCH( $m$ )-Modell

Der Prozess der erwartungswertbereinigten Logrenditen  $(a_t)_{t \in \mathbb{N}}$  folge einem GARCH( $m, s$ )-Modell, falls

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (8)$$

wobei  $m, s \in \mathbb{N}_0$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  für  $i = 1, \dots, m$  und  $\beta_j \geq 0$  für  $j = 1, \dots, s$  sowie  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängig, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 seien und die Bedingung

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j < 1 \quad (9)$$

erfüllt sei. Bedingung (9) gewährleistet, dass die unbedingte Varianz der erwartungswertbereinigten Logrenditen endlich ist, d.h.  $Var[a_t] < \infty$ . Das Autoregressive Conditional Heteroskedastic (ARCH)-Modell der Ordnung  $m$ , kurz ARCH( $m$ ), ist ein Spezialfall des GARCH( $m, s$ )-Modells für  $s = 0$ .

Die Bestimmung geeigneter Kandidatenmodelle für eine Zeitreihe erfolgt mit Hilfe der ACF bzw. der PACF.<sup>40</sup> Das GARCH-Modell sollte in Betracht gezogen werden, falls die angezeigte Ordnung

<sup>39</sup>Vgl. insbesondere die Abschnitte 3.2 „Structure of a Model“ und 3.4 „The GARCH-Model“ in [Tsay \(2002\)](#).

<sup>40</sup>Vgl. Zusammenfassung am Ende von Abschnitt 2.5 für AR-/MA-Modelle sowie Abschnitt 3.3.3 „Building an ARCH

eines reinen ARCH-Modells hoch wäre und demzufolge viele Parameter geschätzt werden müssten.<sup>41</sup> Dabei erweist sich bereits das Modell GARCH(1,1) als nützlich:

„Since its introduction, the univariate GARCH model has been applied in countless empirical studies. The GARCH(1,1) model has turned out to be particularly useful for describing a wide variety of financial market data [Bollerslev et al. (1994)].“<sup>42</sup>

## 4.2 Modell für den GI10-Index

Bei Betrachtung des Kursverlaufs der Logpreise des GI10 in Abbildung 4 ist ein Aufwärtstrend erkennbar, der den Abwärtstrend der Zinsen in diesem Zeitraum widerspiegelt.<sup>43</sup> Durch Differenzierung der Logpreise  $\ln(p_t)$  ergeben sich die Logrenditen  $r_t$ , die wiederum näherungsweise<sup>44</sup> den Renditen  $R_t$  entsprechen:

$$r_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1}) = \ln(p_t/p_{t-1}) \approx p_t/p_{t-1} - 1 = (p_t - p_{t-1})/p_{t-1} = R_t. \quad (10)$$

Wie im Abschnitt 4.1 motiviert, bilden die Logpreise bzw. die Logrenditen als Differenzen erster Ordnung die Grundlage für die Zeitreihenanalyse.

**Einheitswurzeltests:** Augmented Dickey-Fuller-Test und Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin-Test In Abschnitt 4.1 wird behauptet, dass davon auszugehen sei, dass die Logpreise nicht-stationär seien und einem stochastischen Trend folgten, der durch einmaliges Differenzieren – d.h. für die Logrenditen – aber eliminiert werden könne. Sowohl der ADF-Test als auch der KPSS-Test bestätigen die Behauptung eines stochastischen Trends der Logpreise des GI10 sowie stationärer Logrenditen<sup>45</sup>, die damit im Weiteren betrachtet werden. Dabei wird schrittweise nach einem geeigneten Zeitreihenmodell für diese gesucht.

**Erwartungswertmodell:** ARMA-Modell für die bedingten Erwartungen der Logrenditen Zunächst werden die ACF und die PACF der Logrenditen betrachtet, um die Ordnung eines möglichen ARMA-Modells für die (bedingten) Erwartungen der Logrenditen zu finden. Beide Funktionen zeigen dabei ähnliche Muster:<sup>46</sup>

- Sie besitzen signifikante (partielle) Autokorrelationen zum Zeitabstand  $k = 1$ .
- Sie besitzen keine signifikanten (partiellen) Autokorrelationen für weitere, kurze Zeitabstände  $k = 2, \dots, 7$ .
- Vereinzelte signifikante (partielle) Autokorrelationen für  $k \geq 8$  deuten aufgrund der Betrachtung (bankarbeits-)täglicher Daten nicht auf saisonale Effekte hin.

Model“, Teilabschnitt „Order Determination“ in Tsay (2002).

<sup>41</sup>Vgl. Abschnitt 3.4 „The GARCH Model“, erster Absatz in Tsay (2002).

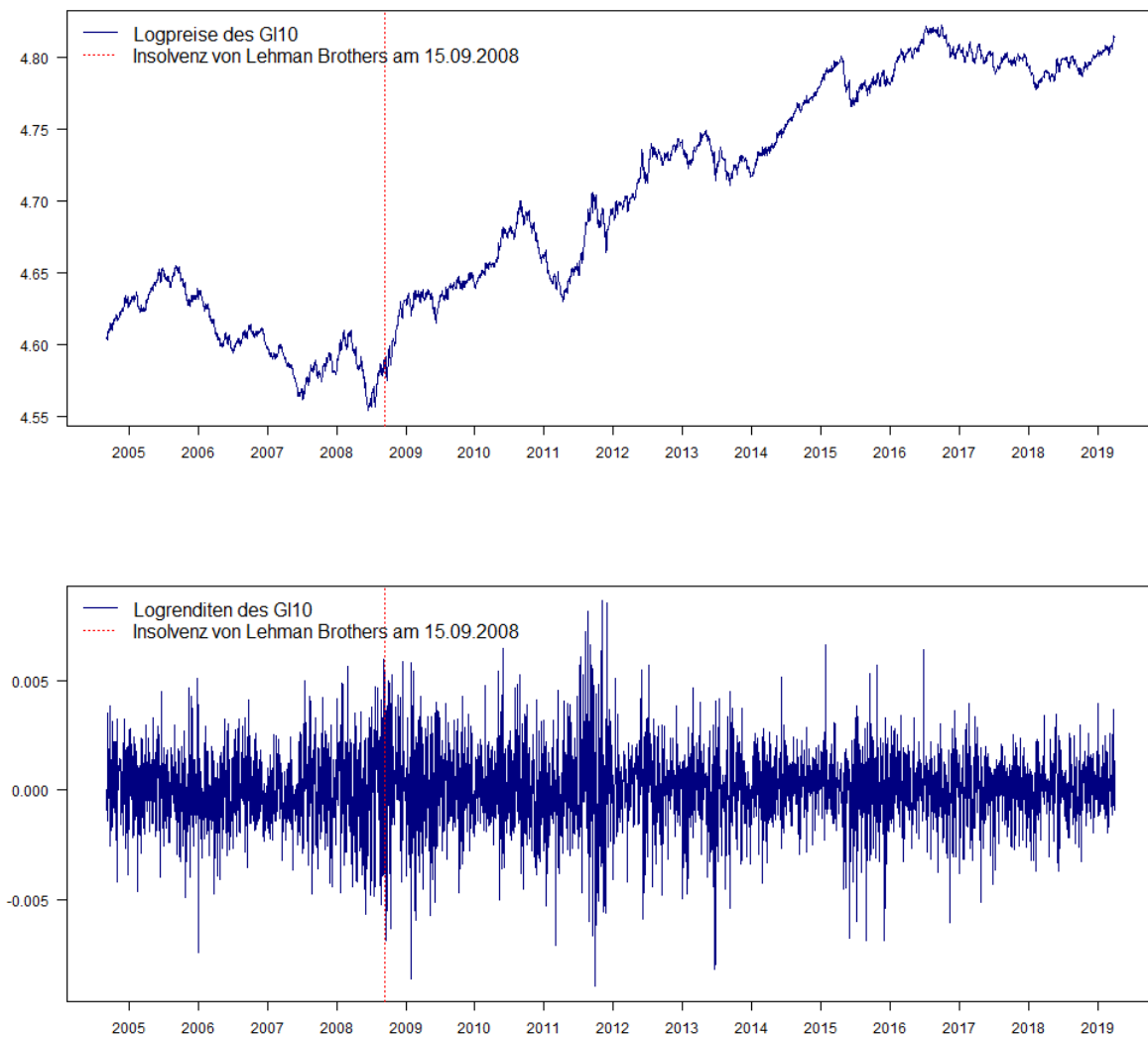
<sup>42</sup>Vgl. Abschnitt 5.2 „Univariate GARCH Models“, erster Absatz in Lütkepohl u. Krätzig (2004).

<sup>43</sup>Vgl. Abbildung 1 auf Seite 6 in Abschnitt 3.2 dieser Arbeit.

<sup>44</sup>Durch Entwicklung des natürlichen Logarithmus um  $x_0 = 1$  gilt für  $x \approx 1$  die Approximation  $\ln(x) \approx x - 1$ .

<sup>45</sup>Vgl. Ergebnisse in Tabelle 5 im Anhang A.1 auf Seite 53.

<sup>46</sup>Vgl. Abbildung 5 in diesem Kapitel.

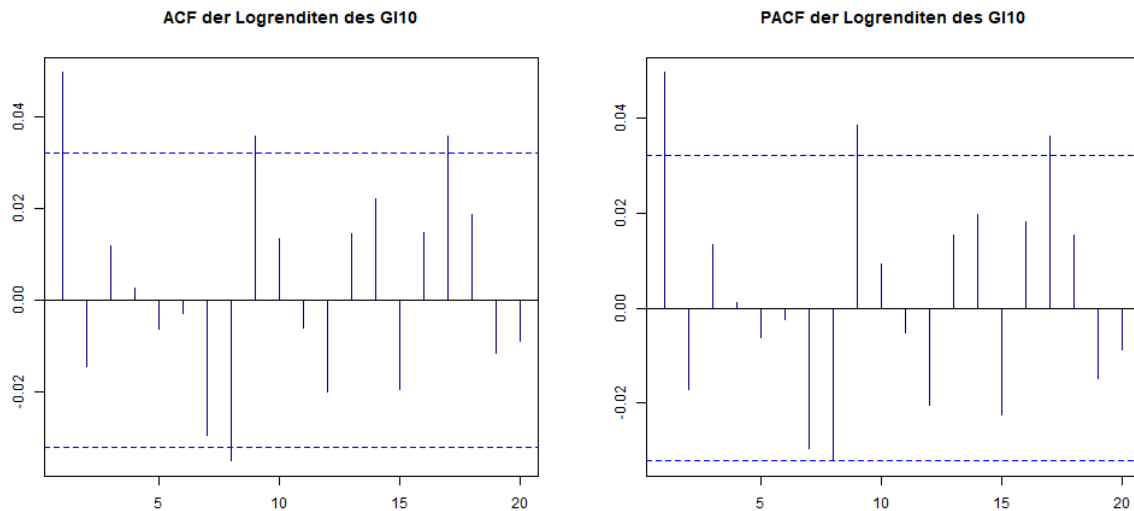


**Abbildung 4:** Logpreise  $\ln(p_t)$  und Logrenditen  $r_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1})$  des GI10

- Weder ACF noch PACF zeigen ein eindeutiges Muster entweder allmählich abklingender oder plötzlich auf null abfallender Werte.

Die beobachteten seriellen Abhängigkeiten deuten auf einen ARMA-Prozess mit Abhängigkeiten zum Zeitabstand  $k = 1$  hin. Da die (partiellen) Autokorrelationen weder klar auf einen reinen MA(1)- noch auf einen reinen AR(1)-Prozess hindeuten, wird darüber hinaus ein ARMA(1,1) als Kandidatenmodell in Erwägung gezogen.

Das ARMA(1,1)-Modell ist gemäß Gleichung (2) gegeben durch  $r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$ . Bedingt durch die Vorgabe  $\theta_1 = 0$  bzw.  $\phi_1 = 0$  reduziert es sich auf ein reines AR(1)- bzw. MA(1)-Modell. Die Vorgabe  $\phi_0 = 0$  korrespondiert zu einer Modellschätzung ohne Konstante. Bei der Schätzung des Modells ist, abhängig von der Darstellung des ARMA-Prozesses, auf das Vorzeichen



**Abbildung 5:** ACF und PACF der Logrenditen des GI10

der MA-Komponenten zu achten.<sup>47</sup> Folgende Ergebnisse lassen sich beobachten:<sup>48</sup>

- In allen drei Fällen – ARMA(1,1) sowie reiner MA(1) und reiner AR(1) – ist die Konstante  $\phi_0$  mit p-Werten über 10 % insignifikant.
- Der jeweilige Parameter  $\phi_1$  bzw.  $\theta_1$  des reinen AR(1)- bzw. MA(1)-Modells ohne Konstante  $\phi_0$  ist mit p-Werten deutlich unter 1 % signifikant.
- Für das gemischte Modell ARMA(1,1) ohne Konstante liegen die p-Werte der Parameter  $\phi_1$  und  $\theta_1$  bei rund 11 % bzw. 6 % und sind damit auf einem Signifikanzniveau von 5 % insignifikant.
- AIC und BIC des reinen MA(1)-Modells ohne Konstante sind kleiner als die des reinen AR(1)-Modells ohne Konstante.

Tests der Residuen der Kandidatenmodelle zeigen zum Signifikanzniveau von 5 % keine Autokorrelationen.<sup>49</sup>

Nach den obigen Erkenntnissen lässt sich also festhalten, dass sowohl das reine MA(1) ohne Konstante als auch das reine AR(1) ohne Konstante geeignete Kandidatenmodelle zur Abbildung der bedingten Erwartungen der Logrenditen des GI10 sind. Aufgrund der niedrigeren Werte für AIC und BIC wird das MA(1)-Modell ohne Konstante präferiert. Dessen Residuen zeigen weder einen Trend noch offensichtliche serielle Abhängigkeiten und ACF bzw. PACF der Residuen zeigen ebenfalls keine signifikanten (partiellen) Autokorrelationen für niedrige Zeitabstände.<sup>50</sup> Das MA(1)-Modell mit  $\phi_0 = 0$  und  $-\hat{\theta}_1 \approx 0,052$

$$r_t = a_t + 0,052 \cdot a_{t-1} \quad (11)$$

<sup>47</sup>Zum Beispiel verwendet die für diese Arbeit verwendete R-Funktion `arma` eine Darstellung mit umgekehrten Vorzeichen der MA-Komponenten als in Gleichung (2). Die zum Ergebnisvergleich herangezogene Stata-Funktion `arma` folgt ebenfalls dieser Darstellung.

<sup>48</sup>Vgl. Tabellen 6 und 7 im Anhang A.1 auf Seite 53.

<sup>49</sup>Vgl. Tabelle 8 im Anhang A.1 auf Seite 54.

<sup>50</sup>Vgl. grüne Graphen in Abbildung 16 im Anhang A.1 auf Seite 55.

ist also geeignet, um die bedingten Erwartungen der Logrenditen abzubilden. Die Autokorrelation eines MA(1)-Prozesses ist gegeben durch<sup>51</sup>

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} \text{ und } \rho_l = 0 \text{ für } l > 1.$$

Autokorrelationen bestehen in dem Modell der erwarteten (Log-)Renditen des GI10 also nur zum Zeitabstand  $l = 1$  und betragen  $\hat{\rho}_1 = -\hat{\theta}_1/(1 + \hat{\theta}_1^2) \approx 0,05$ , sind also gering.

#### **ARCH-Effekte:** Bedingte Heteroskedastizität und Modellordnung

Gemäß Gleichung (7) ist die bedingte Varianz der Logrenditen gegeben durch  $\sigma_t^2 = E[a_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$ . Bei stationären ARMA-Modellen ist diese gemäß Voraussetzung konstant. Um zu überprüfen, ob das gefundene MA(1)-Modell die Schwankungen der Logrenditen geeignet abbildet oder ob bedingte Heteroskedastizität vorliegt, werden also die quadrierten Residuen des Modells untersucht.<sup>52</sup>

Die Portmanteau-Tests der quadrierten Residuen bestätigen in höchstem Maße Autokorrelationen der bedingten Varianz.<sup>53</sup> Das kann bei Betrachtung von ACF und PACF der quadrierten Residuen ebenfalls beobachtet werden.<sup>54</sup> Dabei bestehen signifikante (partielle) Autokorrelationen bis zu hohen Zeitabständen  $h > 10$ , d.h. ein reines ARCH-Modell würde viele Parameter  $m$  benötigen, um geeignet zu sein. Wie zum Ende von Abschnitt 4.1 vorgesehen, wird deshalb auf ein GARCH-Modell, ausgehend vom einfachsten Fall eines GARCH(1,1), zurückgegriffen.

#### **Modell MA(1)+GARCH(1,1):** Schätzung unter Annahme normalverteilten Rauschens

Es wird nun eine gemeinsame Schätzung für das folgende, sich aus den Gleichungen (2) und (8) mit  $p = 0$ ,  $q = 1$ ,  $m = 1$ ,  $s = 1$  und  $\phi_0 = 0$  ergebende Modell vorgenommen:

$$\begin{aligned} r_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1}, \\ a_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Die Modellschätzung wird zunächst mit normalverteiltem Rauschen durch die R-Funktion `ugarchfit` vorgenommen, d.h. es wird  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$  vorausgesetzt. Diese Annahme befindet sich im Einklang mit der zuvor durch Verwendung der Funktion `arima` getroffenen Verteilungsannahme bei Schätzung des ARMA-Modells für die (bedingten) Erwartungen. Folgende Ergebnisse sind zu beobachten:<sup>55</sup>

- Die Parameter  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  sind signifikant zum Niveau  $\alpha = 5\%$ . Dagegen ist der Parameter  $\theta_1$  mit einem p-Wert von rund 30 % insignifikant.
- Mit  $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \approx 0,9935 < 1$  ist die Bedingung für endliche unbedingte Varianz von  $a_t$  erfüllt.
- $\hat{\alpha}_0 \approx 2 \cdot 10^{-8}$  ist nur geringfügig größer als Null. Der p-Wert liegt bei fast 90 %, womit der Parameter eigentlich insignifikant ist.  $\alpha_0 > 0$  ist jedoch eine Modellvoraussetzung.

<sup>51</sup>Vgl. Abschnitt 2.5 „Simple Moving-Average Models“, Absatz „Autocorrelation Function“ in Tsay (2002).

<sup>52</sup>Vgl. zum Vorgehen Abschnitt 3.3.3 „Building an ARCH Model“ in Tsay (2002).

<sup>53</sup>Vgl. Tabelle 9 im Anhang A.1 auf Seite 55.

<sup>54</sup>Vgl. rote Graphen in Abbildung 16 im Anhang A.1 auf Seite 55.

<sup>55</sup>Vgl. Tabelle 10 im Anhang A.1 auf Seite 56.

Bei der Untersuchung der standardisierten Residuen  $\hat{a}_t = \hat{a}_t / \hat{\sigma}_t$  und quadrierten standardisierten Residuen  $\hat{a}_t^2$  auf serielle Abhängigkeiten fällt auf, dass die quadrierten standardisierten Residuen zum Zeitabstand  $k = 1$  einen p-Wert von genau 5 % aufweisen und damit an der Grenze zur Signifikanz liegen.<sup>56</sup>

Aufgrund der Modellannahme  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$  ist ein Wert für die Wölbung der  $\hat{a}_t$  nahe der Wölbung der Standardnormalverteilung von 3 zu erwarten. Tatsächlich liegt dieser jedoch deutlich darüber.<sup>57</sup> Beim Vergleich der Quantile der theoretischen Verteilung  $F_{\varepsilon_t}^{-1}$  mit denen der beobachteten Verteilung der standardisierten Residuen  $F_{\hat{a}_t}^{-1}$  zeigt sich, dass die tatsächliche Verteilung schwerere Ränder besitzt.<sup>58</sup>

Die Ergebnisse der Modellschätzung sind nicht zufriedenstellend. Da insbesondere die Annahme normalverteilten Rauschens nicht gut geeignet ist, soll deshalb eine mögliche Alternative, das Student-t-verteilte Rauschen, untersucht werden.<sup>59</sup>

### Modell MA(1)+GARCH(1,1): Schätzung unter Annahme Student-t-verteilten Rauschens

Im Gegensatz zu vorher wird nun die Verteilungsannahme  $\varepsilon_t \sim t(\nu)$  getroffen, womit die (standardisierte) Student-t-Verteilung zum Parameter  $\nu > 0$  bezeichnet sei. Der Parameter  $\nu$  wird zusammen mit den anderen Modellparametern aus Gleichung (12) geschätzt. Hier ist Folgendes zu beobachten:<sup>60</sup>

- Die Parameter  $\theta_1$ ,  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  sind signifikant zum Niveau  $\alpha = 5\%$ .
- Die Bedingung  $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 < 1$  für endliche unbedingte Varianz von  $a_t$  ist erfüllt.<sup>61</sup>
- $\hat{\alpha}_0 \approx 2,5 \cdot 10^{-8}$  ist nur geringfügig größer als Null und mit einem p-Wert von rund 90 % eigentlich insignifikant.  $\alpha_0 > 0$  ist jedoch eine Modellvoraussetzung.

Portmanteau-Tests sowie ACF und PACF der Modellresiduen zeigen keine Anzeichen serieller Abhängigkeiten.<sup>62</sup> Der Vergleich der Quantile der theoretischen Verteilung  $F_{\varepsilon_t}^{-1}$  mit denen der beobachteten Verteilung der standardisierten Residuen  $F_{\hat{a}_t}^{-1}$  zeigt eine hohe Übereinstimmung.<sup>58</sup> Die gemessene Wölbung der Residuen in Höhe von rund 4,24 stimmt mit der theoretischen Wölbung der standardisierten Student-t-Verteilung besser als vorher unter der Normalverteilungsannahme überein.<sup>63</sup>

### Vergleich: Modellschätzung mit Hilfe der Stata-Funktion arch

Zum Vergleich wird das Modell (12) mit Hilfe der Stata-Funktion `arch`, jeweils mit normal- und Student-t-verteiltem Rauschen, geschätzt.<sup>64</sup> Im Gegensatz zur Schätzung mittels `ugarchfit` sind

<sup>56</sup>Vgl. im Anhang A.1 Abbildung 17 auf Seite 59 sowie Tabelle 14 auf Seite 57.

<sup>57</sup>Vgl. Tabelle 16 im Anhang A.1 auf Seite 58.

<sup>58</sup>Vgl. Abbildung 6 in diesem Abschnitt.

<sup>59</sup>Vgl. zweiter Absatz in Abschnitt 3.4 „The GARCH Model“ in Tsay (2002): „ $\varepsilon_t$  is often assumed to be a standard normal or standardized Student-t distribution.“

<sup>60</sup>Vgl. Tabelle 12 im Anhang A.1 auf Seite 56.

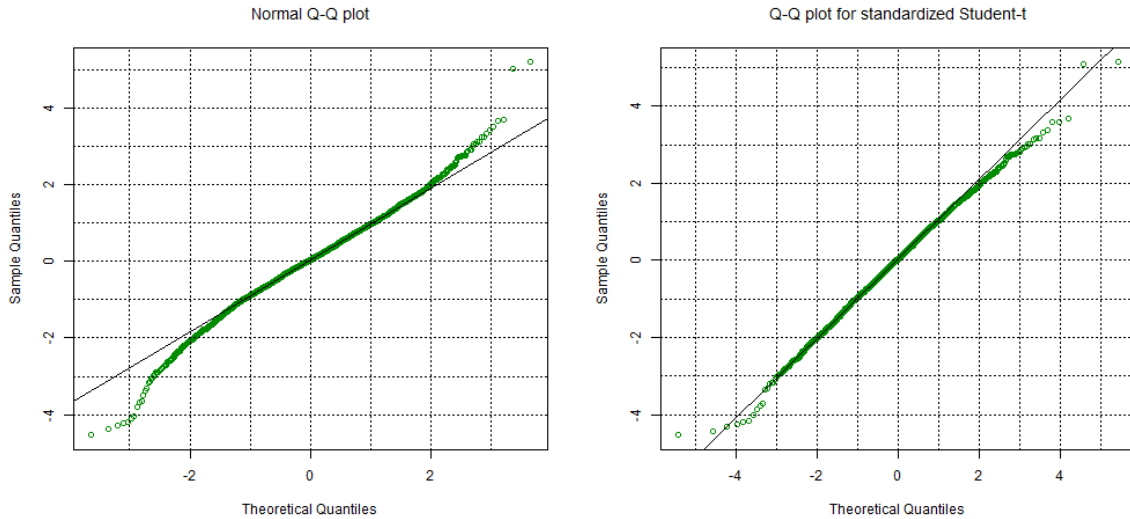
<sup>61</sup>Vgl. zweiter Absatz von Abschnitt 3.4 „The GARCH Model“ in Tsay (2002).

<sup>62</sup>Vgl. im Anhang A.1 Tabelle 15 auf Seite 58 bzw. Abbildung 18 auf Seite 59.

<sup>63</sup>Die theoretische Wölbung der standardisierten Student-t-Verteilung beträgt  $3 + 6/(\nu - 4)$ . Für  $\hat{\nu} = 7,735$  ergäbe sich ein Wert von 4,616. Die Wölbung der Standardnormalverteilung beträgt 3.

<sup>64</sup>Vgl. im Anhang A.1 Tabellen 11 und 13 auf Seite 56.





**Abbildung 6:** Quantil-Quantil-Diagramme der standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne  $\phi_0$  für die Logrenditen des GI10 bei normalverteiletem und Student-t-verteiletem Rauschen

die Schätzwerte der Konstanten der bedingten Varianzgleichung  $\hat{\alpha}_0$  signifikant auf einem Niveau von 5 %. Auch die Werte der Parameterschätzungen unterscheiden sich von den vorherigen Schätzwerten aus R. Beide Funktionen bzw. Programme – `ugarchfit` in R und `arch` in Stata – nehmen Maximum-Likelihood-Schätzungen des Modells vor. Die Bestimmung des Maximums der (Log-)Likelihoodfunktion kann mit Hilfe verschiedener Methoden vorgenommen werden. Die unterschiedlichen Ergebnisse können deshalb verschiedene Gründe wie z.B. unterschiedliche Algorithmen oder unterschiedliche Rechengenauigkeiten haben. Da mit Hilfe der `ugarchfit` verwandten Funktion `ugarchpath` später fiktive, alternative Pfade dieses Prozesses simuliert werden, wird weiter mit deren Ergebnissen verfahren.

#### Fazit: Modell für die Logrenditen des GI10

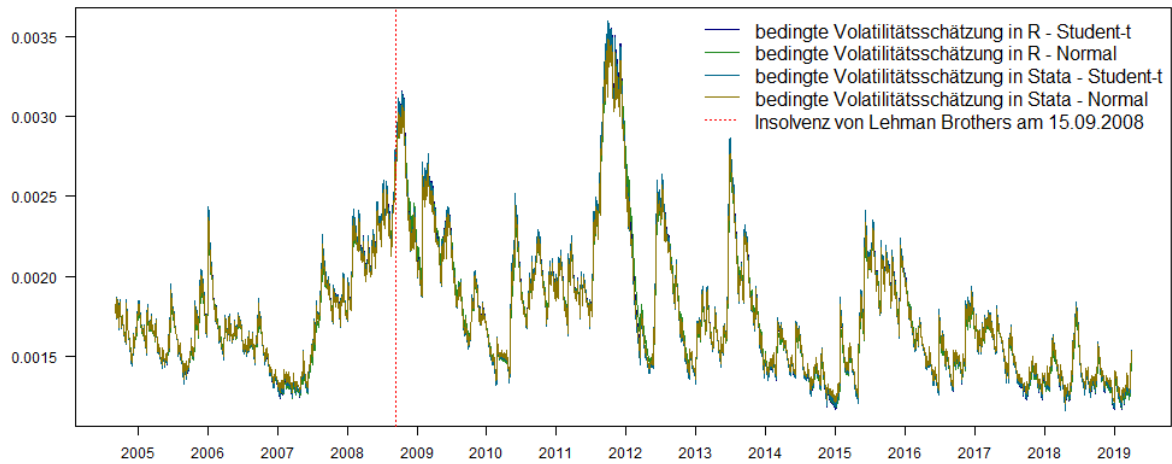
Grundsätzlich entstehen Ungenauigkeiten, wenn zwei Werte nahe Null ins Verhältnis zueinander gesetzt werden, wie dies bei der Ermittlung des p-Wertes für  $\hat{\alpha}_0$  der Fall ist. Der Schätzwert  $\hat{\alpha}_0$  wird deshalb wegen der Voraussetzung  $\alpha_0 > 0$  trotz seines hohen p-Werts akzeptiert. Die Ergebnisse der Modellschätzung mit Student-t-verteiletem Rauschen mittels `ugarchfit` sind ansonsten zufriedenstellend. Durch Einsetzen der Schätzwerte<sup>65</sup> in die obigen Gleichungen (12) ergibt sich mit

$$\begin{aligned} r_t &= a_t + 0,034 \cdot a_{t-1}, \\ a_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = 2,5 \cdot 10^{-8} + 0,038 \cdot a_{t-1}^2 + 0,955 \cdot \sigma_{t-1}^2, \quad \varepsilon_t \sim t(7,735), \end{aligned} \quad (13)$$

ein geeignetes Modell für die Logrenditen des GI10. Die bedingte Volatilität  $\sigma_t$  spiegelt die nach dem jeweiligen Kenntnisstand antizipierten Wertschwankungen wider, so dass deren Analyse in der Fragestellung dieser Arbeit von Interesse ist. Die Betrachtung der Schätzwerte der bedingten Volatilität zeigt, dass sowohl die zuvor diskutierte Verteilungsannahme als auch das Programm bzw. die Funktion

<sup>65</sup>Vgl. Tabelle 12 im Anhang A.1 auf Seite 56.

für die Modellschätzung auf den Verlauf der bedingten Volatilität nur geringen Einfluss haben.<sup>66</sup>



**Abbildung 7:** Zeitverlauf der bedingten Volatilitätsschätzung  $\hat{\sigma}_t$  der Logrenditen des GL10

### 4.3 Analyse der bedingten Volatilitätsschätzungen

Wie in Abschnitt 2.1 genannt, wird von der Aufsicht gefordert, im Beobachtungszeitraum auch unruhige Marktphasen zu berücksichtigen. Deshalb sind insbesondere Phasen hoher bedingter Volatilität  $\sigma_t$  zu identifizieren. Den dafür folgenden Analysen liegen die geschätzten bedingten Volatilitäten aus Modell (13) zu Grunde.

#### 4.3.1 Gleitende Durchschnitte

Als unruhige Marktphasen sollen zunächst die Zeiträume verstanden werden, in denen die bedingte Volatilität einen (lokalen) Höhepunkt erreicht. Bei Betrachtung von Abbildung 7 ist erkennbar, dass  $\hat{\sigma}_t$  relativ stark im Zeitverlauf fluktuiert. Bei Voraussetzung sehr kurzer zeitlicher Umgebungen, würden damit lokale Maxima in sehr kurzen Zeitabständen identifiziert werden. Dem wird wie folgt entgegnet:

1. Es wird eine Glättung der Zeitreihe vorgenommen.
2. Es wird eine zeitliche Umgebung  $l \in \mathbb{N}$  als Mindestabstand zweier lokaler Maxima definiert.

Zur Glättung der Zeitreihe wird das Verfahren der gleitenden Durchschnitte angewendet. Der gleitende Durchschnitt  $\tilde{\sigma}_t$  für  $p \in \mathbb{N}$  Tage ergibt sich – abhängig davon, ob  $p$  gerade oder ungerade ist – durch:

$$\tilde{\sigma}_t = \begin{cases} \frac{1}{p} \cdot \sum_{j=-k}^k \hat{\sigma}_{t+j}, & \text{falls } p = 2k + 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}; \\ \frac{1}{2p} \cdot \sum_{j=-k}^{k-1} \hat{\sigma}_{t+j} + \frac{1}{2p} \cdot \sum_{j=-(k-1)}^k \hat{\sigma}_{t+j}, & \text{falls } p = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

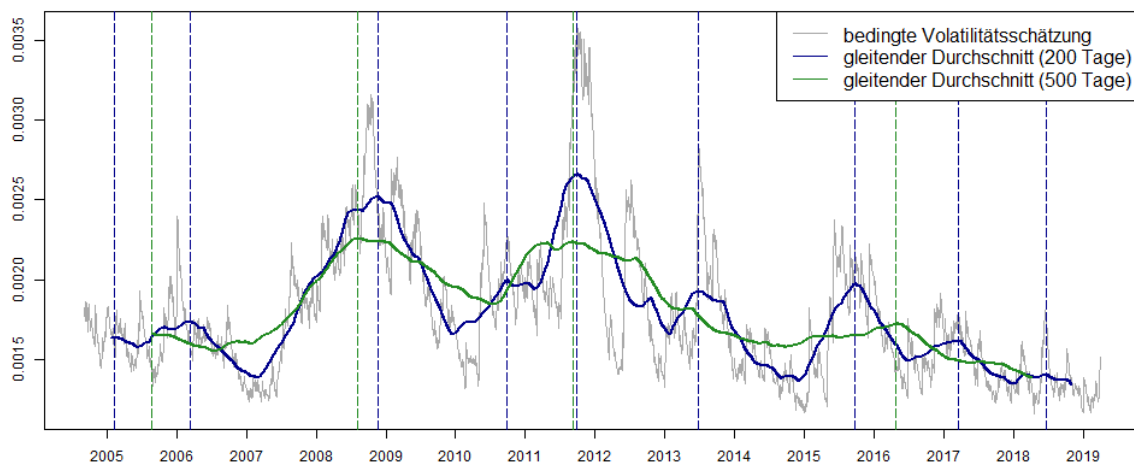
<sup>66</sup>Siehe Abbildung 7 in diesem Abschnitt.

Für die ersten bzw. letzten  $k$  Beobachtungen des betrachteten Zeitraums können keine gleitenden Durchschnittswerte berechnet werden. Für die Wahl der Glättungsperiode  $p$  besteht folgender Zielkonflikt:

- Die Glättungsperiode  $p$  sollte nicht zu klein gewählt werden, um eine Glättung der Daten zu erreichen und damit deren Fluktuation herauszufiltern.
- Je größer  $p$  gewählt wird, desto glatter verläuft  $\tilde{\sigma}_t$  und desto kleiner ist die Anzahl der Zeitpunkte, für die gleitende Durchschnitte ermittelt werden können. Ein zu hohes  $p$  könnte in sich schnell abwechselnden Phasen hoher und niedriger Volatilität dazu führen, dass deren Daten vermischt werden und diese Phasen deshalb unerkannt bleiben. Also sollte  $p$  nicht zu groß gewählt werden.

Ein lokales Maximum sei zum Zeitpunkt  $t_0$  erreicht, wenn sein Wert innerhalb der zeitlichen Umgebung  $l \in \mathbb{N}$ , d.h. auf dem Intervall  $[t_0 - l, t_0 + l]$  maximal ist:

$$\tilde{\sigma}_{t_0} = \max\{\tilde{\sigma}_{t_0-l}, \dots, \tilde{\sigma}_{t_0+l}\}.$$



**Abbildung 8:** Anwendung gleitender Durchschnitte und Bestimmung lokaler Maxima der bedingten Volatilitätsschätzung für  $p = 200/l = 100$  und für  $p = 500/l = 130$

Abbildung 8 illustriert das Verfahren der gleitenden Durchschnitte für die bedingten Volatilitätsschätzungen ( $\hat{\sigma}_t$ ) anhand zweier Beispiele. Dabei werden im Allgemeinen desto weniger lokale Maxima ermittelt, je größer die Glättungsperiode  $p$  gewählt bzw. je größer der Vergleichsradius  $l$  gezogen wird. Je weniger Höhepunkte ermittelt werden, desto größer werden dagegen im Allgemeinen die Abstände zwischen den ermittelten Höhepunkten.

Für die Parameter  $p$  und  $l$  gibt es keine „optimale“ Wahl. Die Ergebnisse zeigen für eine Reihe unterschiedlicher Parametrisierungen zwischen 4 bis 33 Unruhephasen. Der zeitliche Abstand zwischen den Gipfeln zweier Unruhephasen liegt dabei etwa zwischen einem Jahr und fünf Jahren.<sup>67</sup>

<sup>67</sup>Vgl. Tabelle 17 im Anhang A.2 auf Seite 61, wobei ein Jahr mit 250 Bankarbeitstagen gerechnet wird.

### 4.3.2 Volatilitätsclusteranalyse

Wie in Abschnitt 4.1 erwähnt, neigen die empirischen Volatilitäten an Finanzmärkten dazu, Cluster zu bilden.<sup>68</sup> Das Ziel dieses Abschnitts ist es, insbesondere die unruhigen Marktphasen hoher Volatilität durch Clusteranalysen zu identifizieren. Dafür wird das R-Paket `cpm` benutzt, das in [Ross \(2015\)](#) beschrieben wird. Die Vorgehensweise wird im Folgenden kurz beschrieben.

#### Theoretischer Rahmen: das Change Point Model (CPM)

Das CPM versteht Strukturbrüche als Veränderung der Verteilung der Daten. Die gesammelten Beobachtungen  $x_1, x_2, \dots$  seien Realisierungen der Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$ , die als unabhängig und innerhalb der Periode zwischen zwei Strukturbrüchen  $\tau_i$  und  $\tau_{i+1}$  als identisch verteilt mit der Verteilungsfunktion  $F_i$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$  und  $\tau_0 = 0$  vorausgesetzt werden:

$$X_i \sim \begin{cases} F_0, & \text{falls } i \leq \tau_1; \\ F_1, & \text{falls } \tau_1 < i \leq \tau_2; \\ F_2, & \text{falls } \tau_2 < i \leq \tau_3; \\ \dots & \end{cases}$$

Bei der betrachteten sequentiellen Erkennung („Phase II“) werden die Beobachtungen nacheinander betrachtet. Nach jeder Beobachtung wird anhand der bis dahin aufgelaufenen Daten, d.h. ohne Einbeziehung zukünftiger Beobachtungen, entschieden, ob ein Strukturbruch vorliegt oder nicht.<sup>69</sup>

- Ein Strukturbruch wird erkannt, indem die Nullhypothese einer gemeinsamen Verteilung der bisher gesammelten Beobachtungen verworfen wird.
- Der Zeitpunkt des Strukturbruchs wird danach anhand der Maximierung der dem Test zu Grunde liegenden Teststatistik bestimmt.
- Wird kein Strukturbruch erkannt, so wird der Prozess einfach mit der nächsten Beobachtung fortgesetzt.
- Wird dagegen ein Strukturbruch erkannt, beginnt mit dem ersten Zeitpunkt nach dem Strukturbruch eine neue Sequenz an Beobachtungen.

Das Modell verlangt folgende Parameter:<sup>70</sup>

- `cpmType`: Die Methode zur Berechnung der Teststatistik ist abhängig davon zu wählen, welche Verteilungsannahme für die Daten getroffen und nach welcher Art von Strukturbrüchen in der Verteilung (z.B. Verwerfungen im Erwartungswert und/oder in der Varianz) gesucht wird.
- `ARLO`: Die *Average Run Length* gibt die Anzahl an Beobachtungen vor, nach der es durchschnittlich zu einem Fehler erster Art, d.h. einer fälschlichen Strukturbrucherkenntnis kommt.

<sup>68</sup>Vgl. Abschnitt 5.1 „Stylized Facts of Empirical Price Processes“, zweiter Absatz in [Lütkepohl u. Krätzig \(2004\)](#).

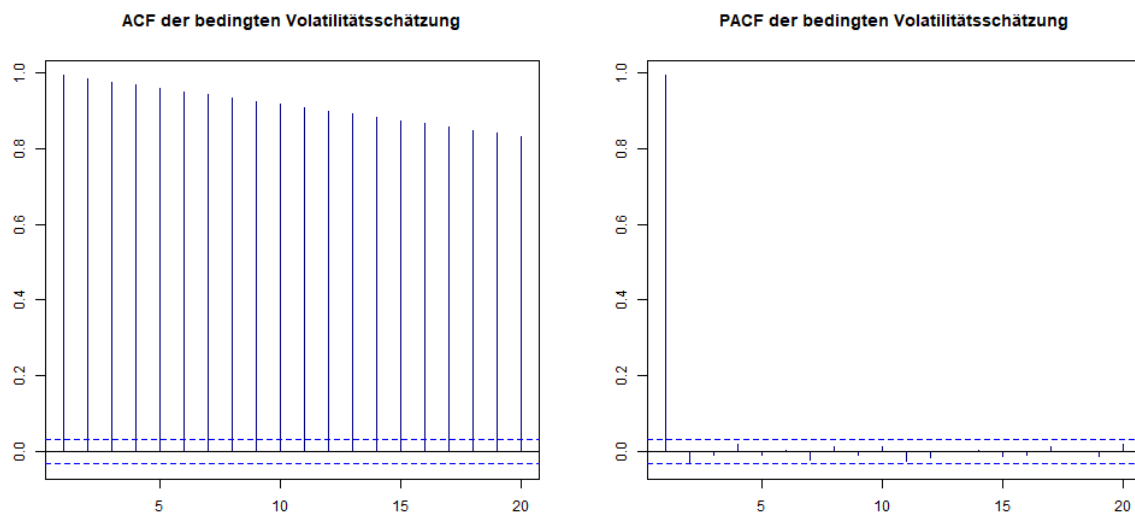
<sup>69</sup>Für eine ausführlichere Beschreibung des Algorithmus siehe Kapitel 2 und 3 in [Ross \(2015\)](#).

<sup>70</sup>Vgl. Kapitel 4 in [Ross \(2015\)](#).

- **startup:** Gibt die Anzahl an Beobachtungen vor, die gesammelt werden, bevor nach einem neuen Strukturbruch gesucht wird. Da der Zeitpunkt der Erkennung eines Strukturbruchs vom anschließend ermittelten Zeitpunkt des Strukturbruchs abweichen kann, können die Zeiträume zwischen zwei Strukturbrüchen kürzer als diese Periode sein.

**Anwendung des CPM:** Beobachtungen der bedingten Volatilität  $\hat{\sigma}_t$

Das CPM setzt unabhängige Beobachtungen voraus. Abbildung 9 zeigt allerdings hohe serielle Abhängigkeiten der  $\hat{\sigma}_t$ . Mit langsam abklingenden, signifikanten Autokorrelationen sowie nach Zeitabständen  $k > 1$  abrupt absterbenden partiellen Autokorrelationen zeigen sie deutliche Anzeichen eines AR(1)-Prozesses. Die ARIMA-Modellschätzung bestätigt diese Vermutung klar, wobei der Prozess mit  $\hat{\phi}_1 = 0,9919$  schon nahe dem einer stochastischen Irrfahrt ist.<sup>71</sup> Dieses Ergebnis ist angesichts der zu Grunde liegenden Modellkonstruktion für die bedingte Varianz in Gleichung (13) wenig überraschend. Die Tests auf einen stochastischen Trend zeigen uneinheitliche Ergebnisse.<sup>72</sup> In jedem Fall eignen sich die bedingten Volatilitätsschätzungen selbst nicht als Datengrundlage für das CPM.



**Abbildung 9:** ACF und PACF der bedingten Volatilitätsschätzung  $\hat{\sigma}_t$

**Anwendung des CPM:** Beobachtungen der Logrenditen des GI10-Index

Wie zuvor in Abschnitt 4.2 erkannt, weisen die Logrenditen des GI10 zwar signifikante Autokorrelationen zum Zeitabstand  $k = 1$  auf, jedoch sind diese sehr gering, was sich auch mit den theoretischen Erwartungen an die Logrenditen deckt:<sup>73</sup>

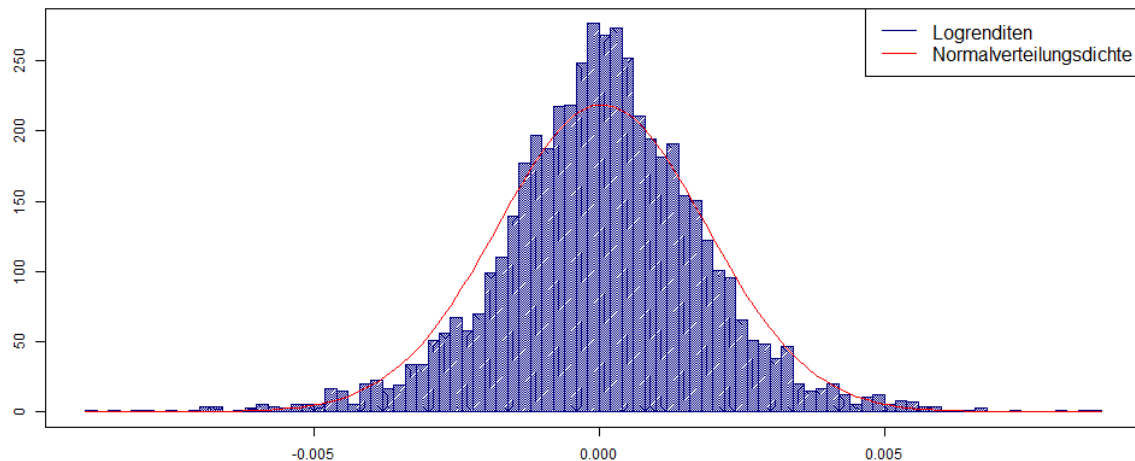
„Changes of (log) prices (compounded returns) are typically not, or at most weakly, autocorrelated.“

<sup>71</sup>Vgl. Tabelle 18 im Anhang A.2 auf Seite 61.

<sup>72</sup>Vgl. Tabelle 19 im Anhang A.2 auf Seite 62.

<sup>73</sup>Vgl. das in Abschnitt 4.1 dieser Arbeit unter dem Absatz „Motivation“ bereits ausführlicher aufgeführte Zitat aus Abschnitt 5.1 „Stylized Facts of Empirical Price Processes“, zweiter Absatz in Lütkepohl u. Krätzig (2004).

Unter Vernachlässigung der – schwachen – Autokorrelationen wird das CPM im Folgenden auf die Logrenditen angewendet. Dabei werden insbesondere solche Methoden als `cpmType` in Betracht gezogen, die für die Verteilung der Logrenditen geeignet erscheinen und die nach Strukturbrüchen in deren Volatilität suchen.



**Abbildung 10:** Histogramm der Logrenditen des GI10

Dabei stellt sich die Frage, ob die beobachteten Logrenditen auch als Realisationen Gauß'scher Zufallsvariablen betrachtet werden sollten. Das Histogramm der beobachteten Logrenditen in Abbildung 10 zeigt eine um den Mittelwert 0 nahezu symmetrische, eingipflige Verteilung. Tests widersprechen zunächst einer Normalverteilungsannahme der beobachteten Logrenditen.<sup>74</sup> Dabei wird jedoch eine Zeitabhängigkeit des bedingten Erwartungswertes und der bedingten Varianz der Logrenditen, wie sie mit dem Zeitreihenmodell in Abschnitt 4.1 vorausgesetzt werden, nicht in Betracht gezogen. Würden die Logrenditen tatsächlich über die gesamte Historie unabhängig und identisch verteilt – also auch mit konstanter Varianz – eintreten, so gäbe es keine Strukturbrüche und die Frage nach der optimalen Beobachtungsperiode wäre eigentlich (fast) gleichgültig. Die Ergebnisse in Abschnitt 4.2 haben aber gezeigt, dass die Gleichungen (12) ein geeignetes Modell für die Logrenditen formulieren, wobei die Annahme normalverteilter Rauschens die bedingte Volatilitätsschätzung gegenüber der besser geeigneten Student-t-Verteilung kaum beeinflusst.<sup>75</sup>

Die beobachteten Logrenditen werden deshalb unter Akzeptanz einer gewissen Unschärfe also – zum Vergleich – auch als Realisationen Gauß'scher Zufallsvariablen betrachtet. Das CPM wird mit den folgenden Methoden für den `cpmType` auf die Logrenditen des GI10 angewendet:<sup>76</sup>

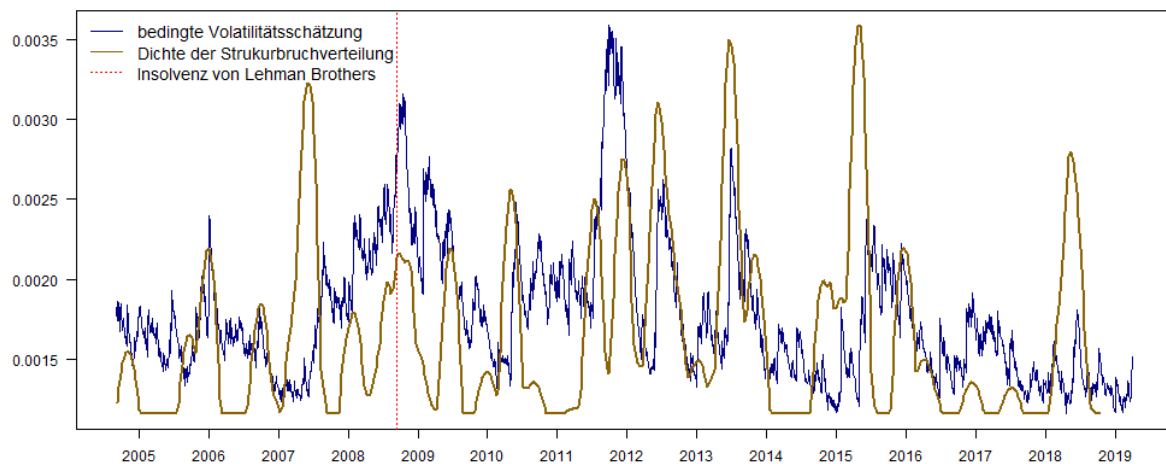
- Bartlett sucht nach Veränderungen in der Varianz einer Reihe Gauß'scher Zufallsvariablen.
- GLR sucht nach Veränderungen im Mittelwert oder in der Varianz einer Reihe Gauß'scher Zufallsvariablen.

<sup>74</sup>Vgl. Tabelle 21 im Anhang A.2 auf Seite 62.

<sup>75</sup>Vgl. Schlussabsatz in Abschnitt 4.2 dieser Arbeit sowie Abbildung 7 auf Seite 19.

<sup>76</sup>Vgl. Abschnitt 4 in [Ross \(2015\)](#).

- Mood sucht nach Veränderungen von Lage und Streuung einer Reihe von Zufallsvariablen ohne Verteilungsannahme.
- Cramer-von-Mises sucht nach generellen Veränderungen einer Reihe von Zufallsvariablen ohne Verteilungsannahme.



**Abbildung 11:** Kerndichteschätzung der Strukturbruchverteilung aus den Ergebnissen des CPM mit Epanechnikov-Kern und einer Bandbreite von 20 Beobachtungen

Abbildung 11 vermittelt ein Bild davon, wie sich die Strukturbrüche im Mittel über alle Methoden zeitlich verteilen. Dafür wird für die aggregierten identifizierten Strukturbrüche aller betrachteten Methoden<sup>77</sup> eine Kerndichteschätzung mit Epanechnikov-Kern und einer Bandbreite von 20 Beobachtungen durchgeführt.

Die identifizierten Strukturbrüche werden als Grenzen von Volatilitätsclustern betrachtet, d.h. mit Identifizierung von  $q \in \mathbb{N}$  Strukturbrüchen ergeben sich  $q + 1$  Volatilitätscluster.

#### **Bewertung:** Einstufung der beobachteten Volatilitätscluster

Nun soll anhand der Niveaus der bedingten Volatilitätsschätzungen  $\hat{\sigma}_t$  eine Einstufung der Beobachtungen und daraus folgend der Cluster vorgenommen werden. Grundlage für diese Einstufung ist die Einteilung der Box-Whisker-Plots gemäß Tukey (1977). Diese Einteilung wird dabei anhand der bis zum Stichtag einer Beobachtung bekannten Datenhistorie vorgenommen<sup>78</sup>, d.h. die weitere Entwicklung nach einer Beobachtung ist bei dessen Beurteilung noch nicht bekannt. Dieses sequentielle Vorgehen steht im Einklang mit der Erkennung der Strukturbrüche nach Phase II des CPM. Der Interquartilsabstand (IQR) bezeichne den Abstand zwischen dem 75 %- und dem 25 %-Quantil der bekannten Datenhistorie. Jede Beobachtung wird wie folgt eingestuft:

<sup>77</sup>Vgl. Tabellen 22, 23, 24 und 25 im Anhang A.2 ab Seite 63.

<sup>78</sup>Die Bestimmung der Quantile beginnt nach einer Datenhistorie von drei Jahren, d.h. mit der 751. Beobachtung. Für die ausgelassenen ersten 750 Beobachtungen werden jeweils die ersten ermittelten Werte übernommen.

1. **extreme Volatilität:** Die Volatilitätsschätzung überschreitet die Grenze für extreme Ausreißer in Höhe des 75 %-Quantils +  $3 \cdot \text{IQR}$  oder sie erreicht einen neuen Höchstwert.
2. **hohe Volatilität:** Die Volatilitätsschätzung überschreitet die Grenze für milde Ausreißer in Höhe des 75 %-Quantils +  $1,5 \cdot \text{IQR}$  oder sie erreicht einen neuen Dreijahreshöchstwert.
3. **erhöhte Volatilität:** Die Volatilitätsschätzung überschreitet das 75 %-Quantil und sie erreicht einen neuen Einjahreshöchstwert.

Anhand dieser Einstufung der Beobachtungen werden die Cluster, mit Überprüfung der Bedingungen von oben nach unten, wie folgt eingestuft:

- Das erste Cluster der Datenhistorie wird, da noch keine Vergleichscluster vorliegen, neutral eingestuft.
- Wird in einem Cluster an einem Stichtag eine extreme (hohe / erhöhte) Volatilität beobachtet, so handelt es sich um ein Cluster extremer (hoher / erhöhter) Volatilität.
- Werden weder extreme noch hohe noch erhöhte Volatilitäten beobachtet, handelt es sich um ein neutrales Cluster.

Diese Abgrenzung ist zwar willkürlich, aber intuitiv und führt bei Betrachtung der resultierenden Clustereinteilungen in den meisten Fällen zu einer ausgewogenen, nachvollziehbaren Zuordnung.<sup>79</sup>

**Resultate:** Ergebnisse der Volatilitätsclusteranalyse

Folgendes kann bezüglich der gemäß der verschiedenen Methoden identifizierten Volatilitätscluster beobachtet werden:<sup>80</sup>

- Je kürzer die *Average Run Length* bzw. die *startup*-Periode gewählt werden, desto mehr Cluster werden ceteris paribus in der Regel gebildet. Das ist aufgrund der zunehmenden Toleranz für Fehler erster Art bzw. der zu erwartenden Zunahme der Mindestlänge der Cluster jeweils zu erwarten.
- Die mittlere Länge der gebildeten Cluster nimmt in der Regel zu, je weniger Cluster gebildet werden. Auch diese Beobachtung ist zu erwarten.
- Die Methode des *cpmType* wirkt sich in der Regel so aus, dass für „Bartlett“ die meisten, „GLR“ die zweitmeisten, „Mood“ die drittmeisten und „Cramer-von-Mises“ die wenigsten Cluster gebildet werden.
- Die Abstände zwischen Clustern mit extremer oder hoher Volatilität betragen bei allen Methoden und Parametrisierungen grob etwa zwischen rund 1300 und 1900 Handelstagen, d.h. grob zwischen fünf und siebeneinhalb Jahren.

<sup>79</sup>Vgl. z.B. Abbildung 12 in diesem Abschnitt oder Abbildung 21 im Anhang A.2 auf Seite 65. Dabei sind die Cluster extremer (hoher / erhöhter) Volatilität entsprechend rot (gelb / grau) hervorgehoben.

<sup>80</sup>Vgl. Tabellen 22, 23, 24 und 25 im Anhang A.2 ab Seite 63.



- Die Abstände zwischen Clustern mit mindestens erhöhter Volatilität liegen bei allen Methoden und Parametrisierungen unter 840 Handelstagen. Für den `cpmType` „Mood“ liegen sie zumeist unter 800 Handelstagen.
- Die geringen Distanzen zwischen Clustern mit mindestens erhöhter Volatilität für den `cpmType` „Cramer-von-Mises“ treten auf, weil in diesen Fällen nur sehr wenige Cluster gebildet werden, die dann (fast) alle die oben genannten Kriterien für mindestens erhöhte Volatilität erfüllen.

In [Ross \(2015\)](#) wird das CPM auf Finanzmarktdaten angewendet, wobei ebenfalls die Logrenditen betrachtet werden.<sup>81</sup> Aufgrund der leptokurtischen Wölbung der Logrenditen wird hier der `cpmType` „Mood“ verwendet. Zur Vermeidung von Falscherkennungen wird der ARLO bei 9273 Beobachtungen auf 5000 gesetzt. Die `startup`-Periode wird bei den dreistündlichen Beobachtungen auf 200 gesetzt.

Für den GL10 liegen ebenfalls leptokurtische Logrenditen vor.<sup>82</sup> Wie bereits vorher gesehen, werden Tests auf deren Normalität verworfen. Die `cpmTypes` „Bartlett“ und „GLR“ sind deshalb nicht die in erster Linie zu betrachtenden Methoden. Der `cpmType` „Cramer-von-Mises“ ist im Gegensatz zu „Mood“ nicht allein zur Strukturbrucherkennung von Lage und Streuung der Daten ausgerichtet. Außerdem führt er zur Bildung nur weniger Cluster, was der Variation der bedingten Volatilitätsschätzung nicht gerecht wird und eine geeignete Einteilung dieser groben Cluster erschwert.<sup>83</sup> Deshalb richtet sich der Fokus zuvorderst auf den `cpmType` „Mood“.

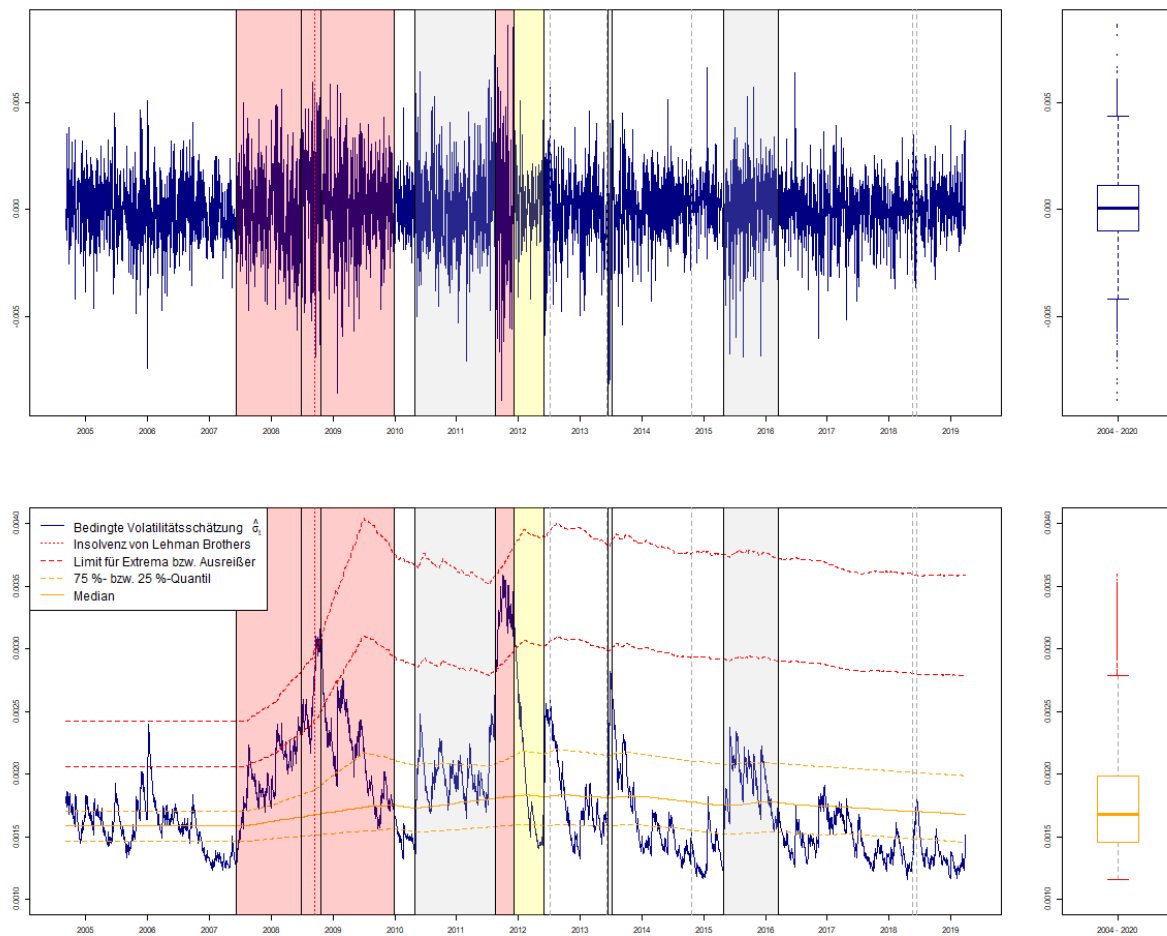
Abbildung 12 zeigt das Ergebnis der Volatilitätsclusteranalyse für den GL10 anhand einer zu dem Beispiel in [Ross \(2015\)](#) vergleichbaren Parametrisierung. Darin ist zu erkennen, dass die Volatilität sich seit dem Höchststand 2012 beruhigt und seither nur noch Cluster erhöhter oder normaler Volatilität ausprägt. Insbesondere liegt seit 2016 ein Umfeld niedriger Volatilität vor. Wird die Forderung der Bundesbank, „Auswirkungen von stärkeren Parameterveränderungen bei der Risikoeermittlung angemessen zu berücksichtigen“<sup>84</sup> als Berücksichtigung von Beobachtungen aus einem Cluster mit mindestens erhöhter Volatilität verstanden, so hieße das zum gegenwärtigen Zeitpunkt, mindestens drei bis dreieinhalb Jahre in der Historie zurückzuschauen. Das lässt sich im Wesentlichen in allen betrachteten Parametrisierungen beobachten.

<sup>81</sup>Vgl. Abschnitt 5.2 „Streams with multiple change points“ in [Ross \(2015\)](#).

<sup>82</sup>Vgl. Tabelle 20 im Anhang A.2 auf Seite 62 bzw. Abschnitt 4.2 dieser Arbeit.

<sup>83</sup>Vgl. Tabelle 25 im Anhang A.2 auf Seite 64 bzw. Abbildung 7 in diesem Kapitel auf Seite 19.

<sup>84</sup>Vgl. Abschnitt 2.1 dieser Arbeit.



**Abbildung 12:** Volatilitätsclusterung mittels CPM mit `cpmType=„Mood“`, `ARL0=2000`, `startup=200`

## 5 Risikomodellvergleich

In Kapitel 4 wird durch eine Zeitreihenanalyse ein geeignetes Modell für die Wertentwicklung des Musterportfolios aus Abschnitt 2.2 gefunden. Aus der Analyse der bedingten Volatilitätsschätzung und den gesetzlichen Vorgaben in Abschnitt 2.1 kann eine Spanne für den optimalen Beobachtungshorizont abgeleitet werden. Wie gut die verschiedenen, aus den vorherigen Überlegungen begründeten Modellparametrisierungen geeignet sind, soll anhand einer Beurteilung der Güte der Risikomessung mittels Historischer Simulation erfolgen. Das Modell aus Abschnitt 4.2 kann dabei verwendet werden, um neben den Beobachtungen des tatsächlichen historischen Pfades auch Beobachtungen fiktiver Pfade zu simulieren.

### 5.1 Methode der Historischen Simulation

Die Historische Simulation ist eine intuitive, verbreitete Methode zur Ermittlung von Marktpreisrisiken, die ohne explizite Verteilungsannahme für die Renditen auskommt:

„One of the most common methods for VaR estimation is the Historical Simulation. This approach drastically simplifies the procedure for computing the Value at Risk, since

it doesn't make any distributional assumption about portfolio returns.“<sup>85</sup>

**Methode:** absolute oder relative Zinsveränderungen

Die (klassische) Historische Simulation erzeugt die Szenarien möglicher Wertveränderungen einer Position anhand ihrer historischen Wertschwankungen. Für Zinsänderungsrisiken ist dabei zu entscheiden, wie die historischen Zinsveränderungen zu beobachten und auf die aktuelle Position anzuwenden sind:

„Am besten geeignet ist die Definition, bei der die Zinsänderungen keine Korrelation zur absoluten Zinshöhe aufweisen, so dass beispielsweise Zinsänderungen aus einer Niedrigzinsphase in eine Hochzinsphase „übertragen“ werden können. Die Untersuchung hat gezeigt, dass die absolute Zinsdifferenz die beste Eignung besitzt.“<sup>86</sup>

Die Annahme vom Preis- bzw. Zinsniveau unkorrelierter Logrenditen korrespondiert zu der Annahme vom Zinsniveau unkorrelierter absoluter Zinsdifferenzen  $\delta i$ . Das lässt sich am folgenden Beispiel einer Nullkuponanleihe mit Restlaufzeit  $\tau$  und Nominal  $N$  motivieren, deren Ausgangsbarwert durch  $BW := N \cdot (1 + i_\tau)^{-\tau}$  und deren Szenariobarwert durch  $BW' := N \cdot (1 + i_\tau + \delta i)^{-\tau}$  gegeben sei:

$$\ln \frac{BW'}{BW} = \ln \left( \frac{1 + i_\tau}{1 + i_\tau + \delta i} \right)^\tau = \tau \cdot \left( \underbrace{\ln(1 + i_\tau)}_{\approx i_\tau} - \underbrace{\ln(1 + i_\tau + \delta i)}_{\approx i_\tau + \delta i} \right) \approx -\tau \cdot \delta i.$$

Aus Nullkuponanleihen lässt sich jede Zinsposition replizieren, d.h. jeder Zahlungsstrom einer Zinsposition lässt sich als Folge von Nullkuponanleihen unterschiedlicher Restlaufzeit und entsprechenden Nominals auffassen. Diese Idee liegt der Bewertung von Zinspositionen anhand von Diskontfaktoren, die sich als Preise von Nullkuponanleihen verstehen, zu Grunde.<sup>87</sup>

**Methode:** Risikoermittlung für Zinspositionen anhand historischer Zinsszenarien

Das in dieser Arbeit betrachtete Modell konstruiert zur Risikoermittlung von Zinspositionen anhand der tatsächlichen historischen Entwicklung Zinsszenarien. Die Wertveränderungen der Zinsposition durch Eintreten der simulierten Zinsszenarien bilden die Szenariowerte, die zusammen der geschätzten Verteilung möglicher Wertveränderungen der Zinsposition zu Grunde liegen.

1. Die betrachtete Position – ein Einzelgeschäft oder ein Portfolio – wird mit den aktuellen Marktdaten zum Bewertungsstichtag  $t_s$  bewertet. Der resultierende **Ausgangsbarwert**  $BW_{t_s}$  dient dem Vergleich mit den Bewertungen der Position in den entsprechenden Risikoszenarien.
2. Gemäß vorgegebener Beobachtungsperiode wird vom Stichtag  $t_s$  aus  $n \in \mathbb{N}$  Handelstage in die Vergangenheit zurückgeschaut. Aus diesem beobachteten Zeitraum werden die Szenarien der Historischen Simulation ermittelt. Die Betrachtung von Eintagesintervallen  $]t_{s-j}, t_{s-j+1}]$  für  $j = 1, \dots, n$  zerlegt den beobachteten Zeitraum in  $n$  **disjunkte Zeitintervalle**. Unter der

<sup>85</sup>Vgl. Abschnitt 2.2 „Non-Parametric Models“, Seite 10, erster Absatz in [Manganelli u. Engle \(2001\)](#).

<sup>86</sup>Vgl. [Sievi u. a. \(2001\)](#).

<sup>87</sup>Vgl. Abschnitt 3.1.1 dieser Arbeit sowie die darin zitierten Quellen, insbesondere Abschnitt 28.1 in [Deutsch \(2008\)](#).

Annahme nicht-autokorrelierter Marktdatenveränderungen<sup>88</sup> werden damit gegenseitige Abhängigkeiten der verschiedenen Szenarien<sup>89</sup> vermieden.

3. Für jedes Szenario  $j = 1, \dots, n$  werden die Werte der Risikofaktoren am Anfang und am Ende des jeweiligen Szenariozeitintervalls  $]t_{s-j}, t_{s-j+1}]$  miteinander verglichen. Für den Risikofaktor Zins werden jeweils die **absoluten Differenzen der Zinssätze** ermittelt. Durch Verrechnung dieser Veränderungen mit den Zinssätzen  $(i_{\tau, t_s})_{\tau}$  mit Laufzeit  $\tau$  zum Zeitpunkt  $t_s$  ergibt sich die Zinsstruktur des simulierten Szenarios  $(i_{\tau, t_s} + (i_{\tau, t_{s-j+1}} - i_{\tau, t_{s-j}}))_{\tau}$ .
4. Durch Bewertung der zu betrachtenden Position mit der Szenariozinsstruktur ergibt sich der **Szenariobarwert**  $BW_{t_s}^j = BW_{t_s}^{]t_{s-j}, t_{s-j+1}]}$ .
5. Durch den Vergleich des Szenariobarwerts  $BW_{t_s}^j$  mit dem Ausgangsbarwert  $BW_{t_s}$  ergibt sich der **Szenariowert**  $S_{t_s}^j = (BW_{t_s}^j - BW_{t_s})/BW_{t_s} = BW_{t_s}^j/BW_{t_s} - 1$ .
6. Eine Methode, die Anzahl der Szenarien bei gleich langer Beobachtungsperiode zu verdoppeln, ist die **Spiegelung**. Die zu Grunde liegende Idee basiert auf der Annahme, dass zu jeder historischen Marktbewegung ebenso eine gegenläufige Bewegung möglich gewesen wäre. Es wird im Weiteren zwischen den folgenden drei Parametrisierungen unterschieden:
  - ohne Spiegelung (OS): keine Spiegelung der historischen Szenarien.
  - Renditenspiegelung (RS): Spiegelung der Veränderungen der Risikofaktoren; hierfür werden die gespiegelten Zinsszenarien  $(i_{\tau, t_s} - (i_{\tau, t_{s-j+1}} - i_{\tau, t_{s-j}}))_{\tau}$  simuliert.
  - Verteilungsspiegelung (VS): Spiegelung der Szenariowerte, d.h. neben den ungespiegelten Szenariowerten  $S_{t_s}^j$  werden auch die gespiegelten Szenariowerte  $-S_{t_s}^j$  der Risikoermittlung zu Grunde gelegt.
7. Aus der mit obigen Methoden erzeugten Verteilung wird mit Hilfe eines Risikomaßes der **Risikowert** zur Haltedauer der Länge der historischen Zeitintervalle ermittelt. In unserem Fall beträgt diese Dauer einen Tag.
8. Die Risikowerte werden schließlich auf die gewünschte **Haltedauer skaliert**.<sup>90</sup> Dieses Verfahren steht mit den Vorgaben der Aufsicht im Einklang.<sup>91</sup> Da das Backtesting der Risikowerte und damit die Beurteilung der optimalen Wahl der Betrachtungsperiode auf Basis der simulierten Haltedauer von einem Tag erfolgt, wird das Verfahren der Skalierung in dieser Arbeit nicht weiter behandelt.

<sup>88</sup>Vgl. das in Abschnitt 4.1 dieser Arbeit im Absatz „Motivation“ aufgeführte Zitat aus Abschnitt 5.1 „Stylized Facts of Empirical Price Processes“, zweiter Absatz in [Lütkepohl u. Krätzig \(2004\)](#), wonach Veränderungen der (Log-)Preise nicht bzw. höchstens schwach autokorreliert seien.

<sup>89</sup>Die gegenseitige Abhängigkeit der Risikoszenarien durch überlappende Szenariozeiträume wird ebenfalls als Autokorrelation bezeichnet, vgl. Abschnitt 21.2 „Historische Simulation“ in [Deutsch \(2008\)](#). Diese Abhängigkeit ist jedoch mit den seriellen Abhängigkeiten einer Zeitreihe aus Abschnitt 4.1 nicht zu verwechseln.

<sup>90</sup>Die Haltedauer (auch Risikobetrachtungshorizont genannt) soll einheitlich über die verschiedenen Risikoarten ein Jahr betragen (vgl. Abschnitt 2.1 dieser Arbeit bzw. [BaFin \(2018a\)](#)).

<sup>91</sup>Vgl. Abschnitt 2.1 dieser Arbeit, insbesondere die Anmerkung des BCBS auf Seite 222, Abschnitt VI.D.4 „Marktrisiko – Der auf internen Modellen basierende Ansatz – Quantitative Anforderungen“ in [BCBS \(2006\)](#).

**Methode:** Risikoermittlung anhand historischer Renditen

Handelt es sich bei der betrachteten Position z.B. um eine Aktienposition, die nicht (unmittelbar) zinsreagibel ist, kann der Szenariobarwert  $BW_{t_s}^j$  statt durch die Konstruktion eines Marktdatenszenarios wie in Schritt 3 direkt aus den historischen Renditen abgeleitet werden. Dazu werden zum Bewertungsstichtag  $t_s$  die historischen Renditen  $(R_{t_s-j+1})_{j=1,\dots,n}$  beobachtet, wobei:

$$R_{t_s-j+1} = \frac{BW_{t_s-j+1} - BW_{t_s-j}}{BW_{t_s-j}} = \frac{BW_{t_s-j+1}}{BW_{t_s-j}} - 1.$$

Diese werden dann direkt für die Szenariobewertung angewandt. Der Szenariobarwert ergibt sich durch:

$$BW_{t_s}^j = BW_{t_s}^{[t_s-j, t_s-j+1]} = BW_{t_s} \cdot (1 + R_{t_s-j+1}) = BW_{t_s} \cdot \frac{BW_{t_s-j+1}}{BW_{t_s-j}}.$$

Dementsprechend ergibt sich daraus für jedes Szenario  $j = 1, \dots, n$  der Szenariowert durch:

$$S_{t_s}^j = BW_{t_s}^j / BW_{t_s} - 1 = R_{t_s-j+1}. \quad (14)$$

Die Szenariowerte bei Simulation historischer Zinsszenarien  $S_{t_s}^{j,ZS}$  und bei Simulation historischer Renditen  $S_{t_s}^{j,R}$  unterscheiden sich, sobald die Zinsstrukturen der Stichtage  $t_s$  und  $t_s-j$  voneinander abweichen:

$$S_{t_s}^{j,R} = R_{t_s-j+1} = \frac{BW_{t_s-j+1}}{BW_{t_s-j}} - 1 = \frac{BW_{t_s-j}^{[t_s-j, t_s-j+1]}}{BW_{t_s-j}} - 1 \neq \frac{BW_{t_s}^{[t_s-j, t_s-j+1]}}{BW_{t_s}} - 1 = S_{t_s}^{j,ZS}.$$

Anhand des Beispiels einer Nullkuponanleihe mit Restlaufzeit  $\tau$  lässt sich mit Hilfe der Approximation der zusammengesetzten Verzinsung durch die stetige Verzinsung  $(1 + i_\tau)^{-\tau} \approx \exp(-i_\tau \cdot \tau)$  zeigen, dass dieser Unterschied klein ist:

$$\begin{aligned} S_{t_s}^{j,ZS} &= \frac{BW_{t_s}^{[t_s-j, t_s-j+1]}}{BW_{t_s}} - 1 = \frac{(1 + i_{\tau, t_s} + (i_{\tau, t_s-j+1} - i_{\tau, t_s-j}))^{-\tau}}{(1 + i_{\tau, t_s})^{-\tau}} - 1 \\ &\approx \frac{\exp(-\tau \cdot (i_{\tau, t_s} + (i_{\tau, t_s-j+1} - i_{\tau, t_s-j})))}{\exp(-\tau \cdot i_{\tau, t_s})} - 1 = \exp(-\tau \cdot (i_{\tau, t_s-j+1} - i_{\tau, t_s-j})) - 1 \\ &= \frac{\exp(-\tau \cdot i_{\tau, t_s-j+1})}{\exp(-\tau \cdot i_{\tau, t_s-j})} - 1 \approx \frac{(1 + i_{\tau, t_s-j+1})^{-\tau}}{(1 + i_{\tau, t_s-j})^{-\tau}} - 1 = S_{t_s}^{j,R}. \end{aligned}$$

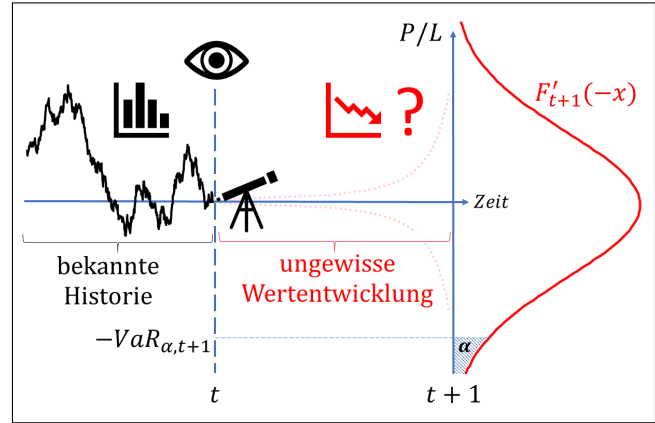
Das Beispiel der Nullkuponanleihe lässt sich wiederum auf andere Zinspositionen übertragen, da jede Zinsposition als eine Menge von Nullkuponanleihen unterschiedlicher Laufzeit und entsprechenden Nominals aufgefasst werden kann.

Die Risikoermittlung anhand historischer Renditen ist eine Alternative zur Konstruktion von Marktdatenszenarien. Liegen keine Beobachtungen der Veränderungen einzelner Risikofaktoren vor – wie im Fall simulierter fiktiver Pfade von Wertveränderungen des Gl10 in Abschnitt 5.6, bei dem die den Wertveränderungen zu Grunde liegenden Zinsveränderungen unbekannt sind – oder sind die Kurse selbst (wie bei Aktien) die zu betrachtenden Risikofaktoren, so kann mit Hilfe dieser Methode das Risiko ermittelt werden.

**Vorbereitung:** Notationen

Der Auswertungszeitpunkt sei im Folgenden mit  $t$  bezeichnet.  $X_{t+1}$  sei die – zur Zeit  $t$  noch unbekannte – Wertveränderung einer betrachteten Position im Zeitintervall  $]t, t+1]$ . Wie in Abschnitt 4.1 spiegele die Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  alle zur Zeit  $t$  verfügbaren Informationen wider.  $F_{t+1}$  bezeichne die auf die zur Zeit  $t$  verfügbaren Informationen bedingte Verteilungsfunktion der Position zur Zeit  $t+1$ , d.h.  $P[X_{t+1} \leq x \mid \mathcal{F}_t] = F_{t+1}(x)$ . Da die tatsächliche Verteilungsfunktion  $F_{t+1}$  unbekannt ist, wird zur Schätzung des Risikos die durch das Modell – z.B. durch die Historische Simulation – geschätzte Verteilungsfunktion  $\hat{F}_{t+1}$  herangezogen.

Die Definition der Risikomaße Value at Risk (VaR) und Expected Shortfall (ES) ist angelehnt an [Franke u. a. \(2011\)](#).<sup>92</sup> Der Zeitindex sei dabei jedoch aus Konsistenzgründen zu [Acerbi u. Szekely \(2014\)](#) nicht auf den Auswertungszeitpunkt  $t$ , sondern auf den Prognosezeitpunkt  $t+1$  bezogen. Wird das Konfidenzniveau, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass der VaR nicht überschritten wird, durch  $(1 - \alpha)$  gegeben, so soll der VaR im Folgenden mit  $\alpha$  indiziert werden.



**Abbildung 13:** Perspektive zum Auswertungszeitpunkt der Risikoermittlung

**Definition:** Value at Risk und Expected Shortfall

Der Value at Risk (VaR) zum Konfidenzniveau  $(1 - \alpha)$  einer Position zum Auswertungszeitpunkt  $t$  für den Prognosezeitpunkt  $t+1$  sei gegeben durch

$$VaR_{\alpha, t+1} = -\inf \{x \in \mathbb{R} \mid F_{t+1}(x) \geq \alpha\}. \quad (15)$$

Die Indikatorvariable einer Überschreitung der VaR-Prognose für den Zeitpunkt  $t+1$  zur Zeit  $t$  durch die eintretende Wertveränderung  $X_{t+1}$  ist damit gegeben durch

$$I_{\alpha, t+1} = \mathbf{1}_{\{X_{t+1} + VaR_{\alpha, t+1} < 0\}}. \quad (16)$$

Der Expected Shortfall (ES) zum Level  $(1 - \alpha)$  einer Position zum Auswertungszeitpunkt  $t$  für den Prognosezeitpunkt  $t+1$  sei gegeben durch

$$ES_{\alpha, t+1} = -E[X_{t+1} \mid X_{t+1} + VaR_{\alpha, t+1} < 0]. \quad (17)$$

**Bemerkung:** Anforderung der deutschen Aufsicht

Wie in Abschnitt 2.1 aufgeführt, fordert die deutsche Aufsicht zukünftig eine Risikomessung mit dem Risikomaß Value at Risk zum Konfidenzniveau 99,9 % oder ein äquivalentes Verfahren, während der vorherige Status Quo in der Verwendung des VaR zum Konfidenzniveau 99 % besteht. Letzterer ist äquivalent zum Expected Shortfall zum Level 97,5 %:

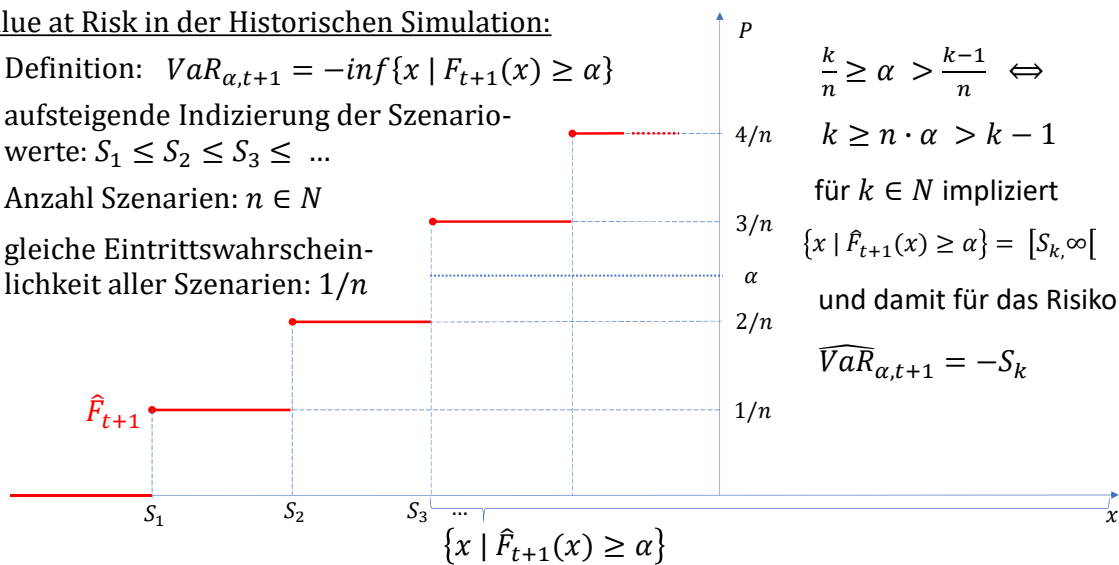
<sup>92</sup>Vgl. Gleichungen (16.11) und (16.12) bzw. Definition 18.2 in [Franke u. a. \(2011\)](#).

„ES<sub>2,5%</sub> was correctly chosen by the Committee to equal VaR<sub>1%</sub> for Gaussian tails, and penalize heavier tails. This is analogous to replacing 50 with 80 in road signs when switching from mph to km/h.“<sup>93</sup>

Diese (ungefähre) Äquivalenz kann im Zeitverlauf der historischen Risikomessung auch in Abbildung 15 beobachtet werden. Der VaR zum Konfidenzniveau 99,9 % ist dagegen etwa äquivalent zum ES zum Level 99,7 %.<sup>94</sup> Neben der Wahl des Konfidenzniveaus fordert die BaFin (2018a) eine Konsistenz zwischen den verschiedenen Risikoarten. Die Historische Simulation ist vor allem ein Modell zur Messung von Marktpreisrisiken. Da in anderen Risikoarten der Value at Risk noch immer das vorherrschende Risikomaß ist und da es dafür im Marktpreisrisiko ein etabliertes Backtesting gibt,<sup>95</sup>

#### Value at Risk in der Historischen Simulation:

- Definition:  $VaR_{\alpha,t+1} = -\inf\{x \mid F_{t+1}(x) \geq \alpha\}$
- aufsteigende Indizierung der Szenariowerte:  $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \dots$
- Anzahl Szenarien:  $n \in \mathbb{N}$
- gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit aller Szenarien:  $1/n$



**Abbildung 14:** Verteilungsfunktion und Risikomessung in der Historischen Simulation

#### Bemerkung: Risikomessung mittels klassischer Historischer Simulation

Wie in Abbildung 14 illustriert, ergibt sich der Value at Risk aus der simulierten Verteilung  $\hat{F}_{t+1}$  anhand seines Konfidenzniveaus durch Abzählen der sortierten Szenariowerte  $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \dots$ , d.h. ohne Interpolation zwischen den Szenariowerten oder Schätzung einer glatten Verteilungsfunktion.  $I_S$  bezeichne die Indikatorvariable, ob gespiegelte Szenarien betrachtet werden oder nicht, d.h.  $I_S = 1$ , falls Renditenspiegelung (RS) oder Verteilungsspiegelung (VS) angewendet werden und  $I_S = 0$ , falls das Risiko ohne Spiegelung (OS) ermittelt wird. Dann basiert die Risikoermittlung bei historischem Beobachtungszeitraum  $n \in \mathbb{N}$  also auf  $(1 + I_S) \cdot n$  Szenarien und die Schätzung der VaR-Prognose wird gegeben durch

$$\widehat{VaR}_{\alpha} = -S_{\lceil \alpha \cdot (1+I_S) \cdot n \rceil}, \quad (18)$$

<sup>93</sup>Vgl. Abschnitt 1 „Backtesting ES“ in Ross (2015).

<sup>94</sup>Vgl. Beispielrechnungen im Anhang A.3 in den Tabellen 26 und 27 ab Seite 66.

<sup>95</sup>Vgl. Abschnitt 5.3.2 dieser Arbeit.

wobei  $\lceil \cdot \rceil$  die Aufrundungsfunktion bezeichne:

$$\lceil x \rceil = \min \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Je höher das vorgegebene Konfidenzniveau ist, desto weniger relevante Szenarien bestimmen die Schätzung des VaR und damit des ES. Für  $\alpha \cdot (1 + I_S) \cdot n \leq 1$ , z.B.  $\alpha = 0,1\%$  bei Verfügbarkeit von höchstens 1000 Szenarien, ist die VaR-Schätzung stets durch den schlechtesten Szenariowert  $S_1$  bestimmt. In diesem Fall wäre eine Schätzung des ES gemäß Definition in Gleichung (17) nicht mehr möglich, da es keinen kleineren Szenariowert als den VaR bestimmenden mehr gibt. Für diesen Fall wird die strikte Ungleichung der Bedingung  $X_t + VaR_\alpha < 0$  in Gleichung (17) gelockert, um eine ES-Schätzung stets – als Mittelwert der ersten  $K_{\alpha,n,S} := \max \{\lceil \alpha \cdot (1 + I_S) \cdot n \rceil - 1, 1\}$  Szenarien – vornehmen zu können:

$$\widehat{ES}_\alpha = -\frac{1}{K_{\alpha,n,S}} \cdot \sum_{j=1}^{K_{\alpha,n,S}} S_j. \quad (20)$$

Die Risikomessung reagiert in der Historischen Simulation damit sehr sensibel auf das Eintreten eines neuen Extremszenarios. Fällt andererseits jedoch ein Extremszenario aus dem Betrachtungszeitraum heraus, ohne dass ein gleichwertiges, neues hinzukommt, so kann das zu einem *vorhersehbaren* sprunghaften Risikorückgang führen:

„Finally, VaR estimates based on historical simulation may present predictable jumps, due to the discreteness of extreme returns. (...) This is a very undesirable characteristic and it is probably enough to discard the historical simulation method as a reliable one.“<sup>96</sup>

Die Schwäche vorhersehbarer Risikosprünge ließe sich zum Beispiel durch die Betrachtung abklingender Eintrittswahrscheinlichkeiten, die die Idee der exponentiellen Glättung bei der Mittelwertbestimmung auf die Historische Simulation übertragen, beheben.<sup>97</sup> Die Methode der klassischen Historischen Simulation ohne abklingende Eintrittswahrscheinlichkeiten ist jedoch noch immer verbreitet. Um die folgenden Analysen auf gängige Modelle zu stützen und sich dafür auf die eigentliche Fragestellung zu konzentrieren, wird die Risikoermittlung im Folgenden ohne abklingende Eintrittswahrscheinlichkeiten betrachtet.

**Notation:**  $VaR$  bzw.  $ES$  statt  $\widehat{VaR}$  bzw.  $\widehat{ES}$

Da es sich bei den ermittelten Risikowerten stets um Schätzungen anhand einer geschätzten Verteilungsfunktion  $\hat{F}$  handelt, werden diese aus Vereinfachungsgründen der Notation im Folgenden mit  $VaR$  bzw.  $ES$  bezeichnet, auch wenn damit streng genommen  $\widehat{VaR}$  bzw.  $\widehat{ES}$  gemeint sind.

## 5.2 Vorauswahl von Kandidatenmodellen

Die im Weiteren verwendete Methode der Risikoberechnung wird im vorherigen Abschnitt 5.1 beschrieben. Zur Bestimmung des optimalen Beobachtungszeitraums, aus dem die Szenarien der historischen

<sup>96</sup>Vgl. Abschnitt 2.2 „Non-Parametric Models“, S. 10/11, letzter/erster Absatz in [Manganelli u. Engle \(2001\)](#).

<sup>97</sup>Zur Ausführung der Methode vgl. [Bricke \(2016\)](#); wie sich herausstellte, wurde die Idee als „Hybridmethode“ bereits 1997 formuliert, vgl. [Boudoukh u. a. \(1997\)](#).



Simulation generiert werden, sollen dabei verschiedene Parametrisierungen miteinander verglichen werden. Als Beobachtungszeitraum schlagen [Manganelli u. Engle \(2001\)](#) ein rollierendes Zeitfenster fester Länge zwischen sechs Monaten und zwei Jahren vor:

„Historical Simulation is based on the concept of rolling windows. First, one needs to choose a window of observations, that generally ranges from 6 months to two years.“<sup>98</sup>

In Abschnitt 2.1 dieser Arbeit wird gezeigt, dass die deutsche Aufsicht einen Beobachtungszeitraum von mindestens einem Jahr fordert. Darüber hinaus wird von ihr gefordert „Auswirkungen von stärkeren Parameterveränderungen bei der Risikoermittlung angemessen zu berücksichtigen“.<sup>99</sup> Diese Forderung kann so verstanden werden, dass Beobachtungen aus einem Zeitraum erhöhter Volatilität zu berücksichtigen sind.

Aus der Zeitreihenanalyse der Logrenditen des GI10 in Abschnitt 4.2 kann deren bedingte Volatilität geschätzt werden. Diese wird in Abschnitt 4.3 mit verschiedenen Methoden analysiert. Aus der Anwendung gleitender Durchschnitte in Abschnitt 4.3.1 kann geschlussfolgert werden, dass die zeitlichen Abstände zwischen den Gipfeln unruhiger historischer Marktphasen zwischen einem Jahr und fünf Jahren liegen. In Abschnitt 4.3.2 werden das Change Point Model (CPM) zur Identifikation von Strukturbrüchen als Grenzen von Volatilitätsclustern angewendet und die Cluster anhand ihrer Volatilitätsniveaus bewertet. Dabei kann beobachtet werden, dass die Abstände zwischen Zeiträumen mit mindestens erhöhter Volatilität bei am besten geeigneter Parametrisierung maximal 807 Tage, d.h. etwas mehr als drei Jahre, betragen.

Deshalb sollen folgende Parametrisierungen miteinander verglichen werden:

- Als mögliche Parameter für einen **rollierenden Beobachtungszeitraum** die Zeitfenster **250, 500, 750, 1000 und 1250 Tage**, d.h. Zeiträume zwischen einem Jahr und fünf Jahren. Um gleich viele Beobachtungen miteinander vergleichen zu können, beginnt die Risikoberechnung also nach fünf Jahren, wenn für alle Parametrisierungen genügend Beobachtungen vorhanden sind, um das Risiko zu ermitteln.
- Längere rollierende Beobachtungszeiträume werden nicht einbezogen, da diese die Anzahl an vergleichbaren Beobachtungen reduzieren würden. Außerdem wird in Abschnitt 4.3 dieser Arbeit gezeigt, dass bei einem Beobachtungszeitraum von fünf Jahren historisch stets Szenarien mindestens erhöhter Volatilität in die Risikoermittlung eingeflossen sind.
- Neben den rollierenden Zeitfenstern soll die Idee eines **wachsenden Beobachtungszeitraums** in die Betrachtung einbezogen werden: beginnend mit 1250 Tagen wächst der Beobachtungszeitraum mit fortschreitender Zeit entsprechend an.
- Für jede dieser Beobachtungszeiträume werden die Spiegelungsmethoden Verteilungsspiegelung (VS), Renditenspiegelung (RS) und ohne Spiegelung (OS) betrachtet.

<sup>98</sup>Vgl. Abschnitt 2.2 „Non-Parametric Models“, Seite 10, erster Absatz in [Manganelli u. Engle \(2001\)](#).

<sup>99</sup>Vgl. Seite 17, Abschnitt „5.3.2. Weiterführende Hinweise zur Risikoquantifizierung“, Absatz Nummer 60 in [BaFin \(2018a\)](#).

Insgesamt werden also sechs Beobachtungszeiträume mit jeweils drei Spiegelungsmethoden, d.h.  $6 \times 3 = 18$  verschiedene Parametrisierungen, gegenübergestellt. Anhand welcher Kriterien die Parametrisierungen verglichen werden, wird im folgenden Abschnitt erläutert.

### 5.3 Vergleichskriterien

#### 5.3.1 Vorüberlegungen

Zunächst ist zu überlegen, anhand welcher Kriterien Kandidatenmodelle zu vergleichen sind. Damit ein Modell für die Risikoermittlung überhaupt geeignet ist, müssen die ermittelten Risikowerte „gut“ sein, d.h. seltene, ungünstige Ereignisse sollten genau quantifiziert werden. Die Güte der Risikoermittlung ist dabei in erster Linie durch ein Backtesting der Risikowerte festzustellen, bei dem die prognostizierten Risiken mit den eingetretenen Wertveränderungen über einen Zeitraum miteinander verglichen werden. Das anzuwendende Verfahren ist dabei abhängig vom gewählten Risikomaß. Die Backtestingverfahren für den Value at Risk (VaR) und den Expected Shortfall (ES) werden in den nächsten beiden Abschnitten beschrieben.

Erfüllen mehrere Modelle die Anforderungen an die Güte der Risikomessung im Sinne eines Backtestings, so können weitere Kriterien in Betracht gezogen werden:

1. Da das gemessene Risiko eines Kreditinstituts dessen Risikotragfähigkeit belastet, ist auch die Höhe der ermittelten Risikowerte zu beachten.
2. Da die Risikomessung Impulse für die Banksteuerung liefern soll, kann die Reagibilität der ermittelten Risikowerte auf eintretende Ereignisse mit in die Betrachtung einbezogen werden.

Zu 1): Ein Modell, das sehr hohe Risikowerte prognostiziert, wird bei einer vorsichtigen Beurteilung im Backtesting mindestens genauso gut abschneiden wie ein anderes Modell mit geringeren Risikowerten. Es besteht also die Gefahr, dass bei Optimierung der Modellgüte im Sinne einer vorsichtigen Risikomessung die Ermittlung beliebig hoher Risikowerte belohnt wird. Auf der anderen Seite geht der ermittelte Risikowert in die Risikotragfähigkeitsbewertung eines Finanzinstituts ein: je höher der Risikowert, desto mehr Eigenkapital wird gebunden und desto weniger Eigenkapital steht für die weitere Allokation zur Verfügung, d.h. der Spielraum des Finanzinstituts wird zunehmend eingeschränkt. Deshalb sollten die ermittelten Risikowerte eines Modells nur so hoch sein wie nötig, um eine angemessene Güte der Risikomessung zu gewährleisten.

Zu 2): Die Perspektive zur Ermittlung eines Risikos ist eine asymmetrische: der Fokus liegt auf der Gefahr des Eintritts ungünstiger Ereignisse. Deshalb ist bei geeigneter Risikomessung intuitiv davon auszugehen, dass nach Eintreten von Schockszenarien das Risiko schlagartig ansteigt. Umgekehrt sollte der gemessene Risikowert in einer Ruhephase ausbleibender Schocks jedoch nicht schlagartig, sondern allmählich zurückgehen. Aus diesem Grund sei ein **Risikoreagibilitätskriterium (RRK)** wie folgt definiert:

$$\text{RRK} := \frac{1}{\bar{\rho}} \left( \sum_{t=2}^T (\rho_t - \rho_{t-1})^3 \right)^{1/3}. \quad (21)$$

Dabei seien  $\rho_1, \dots, \rho_T$  die ermittelten Risikowerte des Modells,  $\tilde{\rho}$  ihr Median und  $\rho_t - \rho_{t-1}$  ihre Veränderungen. Im Zähler des RRK wird nicht die p-Norm der Risikoveränderungen gebildet, sondern ihr Vorzeichen bleibt unverändert: Risikoanstiege als Reaktion auf Marktveränderungen sollen belohnt, sprunghafte Rückgänge dagegen als unangemessen bestraft werden. Ein Modell, das intuitiv auf Veränderungen durch sprunghafte Anstiege und allmähliche Rückgänge reagiert, erhält einen höheren Wert als ein Modell, dessen Risikoermittlung weniger intuitiv reagiert. Die Normierung durch den Median soll einen Modellvergleich bei unterschiedlichen Risikoniveaus, z.B. aufgrund unterschiedlicher Konfidenzniveaus, vereinfachen.

### 5.3.2 Backtesting Value at Risk

„The value-at-risk measures are intended to be larger than all but a certain fraction of the trading outcomes, where that fraction is determined by the confidence level of the value-at-risk measure. Comparing the risk measures with the trading outcomes simply means that the bank counts the number of times that the risk measures were larger than the trading outcome.“<sup>100</sup>

Für jeden Stichtag  $t = 1, \dots, T$  wird also das für den Stichtag prognostizierte Risiko  $VaR_{\alpha,t}$  der Wertveränderung des Zeitintervalls  $]t-1, t]$  gegenübergestellt.<sup>101</sup>  $X_t$  bezeichne den zum Zeitpunkt  $t-1$  noch unbekannten Gewinn oder Verlust. Gemäß Notation in Abschnitt 5.1 besitze  $X_t$  die Verteilungsfunktion  $F_t$ . Die Indikatorvariable  $I_{\alpha,t} = \mathbf{1}_{\{X_t + VaR_{\alpha,t} < 0\}}$  aus Gleichung (16) kennzeichnet den „Erfolg“ einer VaR-Überschreitung. Wird das Modell als korrekt spezifiziert vorausgesetzt, so ist diese Bernoulli-verteilt mit der Erfolgswahrscheinlichkeit  $\alpha$ .

Durch die Betrachtung (handels-)täglicher Zeitintervalle überschneiden sich die Zeiträume prognostizierter Risiken bzw. gemessener Wertveränderungen nicht.<sup>102</sup> Durch die Vermeidung dieser auch als Autokorrelation<sup>103</sup> bezeichneten Abhängigkeiten werden die  $(I_{\alpha,t})_{t=1,\dots,T}$  als Folge unabhängiger Zufallsvariablen betrachtet:

„In particular, the primary assumption is that each day's test (exception/no exception) is independent of the outcome of any of the others.“<sup>104</sup>

**Basler Ampelstatus:** Unter der Voraussetzung eines korrekt spezifizierten Modells wird  $(I_{\alpha,t})_{t=1,\dots,T}$  also als Folge unabhängiger, identisch Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $\alpha$  angenommen. Dann ist die Anzahl der Ausreißer  $N_{\alpha,T} = \sum_{i=1}^T I_{\alpha,t} \stackrel{H_0}{\sim} B_{T,\alpha}$  binomialverteilt. Die Grenzen des Akzeptanzbereichs des Modells können damit anhand der Stichprobengröße  $T$  und des Konfidenzniveaus  $\alpha$  ermittelt werden, wobei der BCBS einen Ampelstatus wie folgt definiert:

„The boundaries should be deduced by calculating the binomial probabilities associated with true coverage of 99 % [...]. The yellow zone begins at the point such that the

<sup>100</sup>Vgl. erster Absatz von Abschnitt II „Description of the backtesting framework“ in BCBS (1996).

<sup>101</sup>Vgl. Abbildung 15 in diesem Kapitel auf Seite 43.

<sup>102</sup>Die Überschneidung abgeschlossener Intervalle in den Intervallrandpunkten lässt sich durch die Betrachtung halboffener Zeitintervalle verhindern und kann daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit vernachlässigt werden.

<sup>103</sup>Vgl. Abschnitt 21.2 „Historische Simulation“ in Deutsch (2008) bzw. Abschnitt 5.1 dieser Arbeit.

<sup>104</sup>Vgl. vorletzter Absatz von Abschnitt II „Description of the backtesting framework“ in BCBS (1996).

probability of obtaining that number or fewer exceptions equals or exceeds 95 %. [...]  
 Similarly, the beginning of the red zone is defined as the point such that the probability of obtaining that number or fewer exceptions equals or exceeds 99.99 %.”<sup>105</sup>

Stichprobenumfang	$(1 - \alpha) = 99,9 \%$		$(1 - \alpha) = 99,0 \%$		$(1 - \alpha) = 97,5 \%$	
	Grün	Gelb	Grün	Gelb	Grün	Gelb
250	0	3	4	9	10	16
500	1	4	8	14	17	26
750	1	5	11	19	25	36
1000	2	5	14	23	32	44
1250	2	6	18	26	40	53
1500	3	7	21	30	47	61
1750	3	7	24	34	54	69
2000	4	8	27	37	61	77
2250	4	9	30	41	68	85
2500	4	9	32	44	75	92
2750	5	10	35	48	81	100
3000	5	10	38	51	88	108

**Tabelle 2:** Maximale Anzahl an VaR-Überschreitungen für den Basler Ampelstatus Grün bzw. Gelb in Abhängigkeit von Stichprobenumfang und Konfidenzniveau

**Rechtsseitiger Binomialtest:** Dieser Ampelstatus soll nun als Test formuliert werden und mit einem Binomialtest verglichen werden. Dafür sei  $p_0 = \alpha$  die theoretisch korrekte und  $p = k/N$  die tatsächlich durch das Modell bei einer Stichprobengröße  $T$  und einer gemessene Anzahl  $k$  an VaR-Überschreitungen erreichte „Erfolgswahrscheinlichkeit“ einer VaR-Überschreitung. Das Hypothesenpaar eines rechtsseitigen Binomialtests lautet:

$$H_0 : p \leq p_0$$

$$H_1 : p > p_0$$

Der p-Wert des Modells ist gegeben durch:

$$p_{1s} = P[N_{\alpha,T} \geq k \mid H_0] = P[N_{\alpha,T} > (k - 1) \mid H_0].$$

Der BCBS vergibt dagegen einen grünen Ampelstatus, falls:

$$P[N_{\alpha,T} \leq k \mid H_0] < 95 \% \iff P[N_{\alpha,T} > k \mid H_0] > 5 \%,$$

d.h. falls der p-Wert eines rechtsseitigen Binomialtests auf  $(k + 1)$  Ausreißer den kritischen Wert von 5 % überschreitet. Analog wird ein Gelbstatus vergeben, falls der p-Wert eines rechtsseitigen Binomialtests auf  $(k + 1)$  Ausreißer größer als 0,01 % und kleiner oder gleich 5 % ist. Bei Werten kleiner oder gleich 0,01 % wird ein Rotstatus vergeben. Der p-Wert des rechtsseitigen Binomialtests

<sup>105</sup>Vgl. letzte zwei Absätze von Abschnitt III c) „Supervisory framework for the interpretation of backtesting results - Definition of the green, yellow, and red zones“ in **BCBS (1996)**.

$P[N_{\alpha,T} \geq k \mid H_0]$  und das Pendant für den Basler Ampelstatus  $P[N_{\alpha,T} > k \mid H_0]$  unterscheiden sich durch die Wahrscheinlichkeit

$$P[N_{\alpha,T} = k \mid H_0] = B(k \mid T, \alpha) = \binom{T}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{T-k}.$$

**Zweiseitiger Binomialtest:** Im Gegensatz zum rechtsseitigen Binomialtest testet der zweiseitige Binomialtest nicht die Konservativität, sondern die Genauigkeit des Modells. Um ein Modell nicht nur vorsichtig, sondern auch genau zu parametrisieren, bietet es sich deshalb an, auch diesen Test in Betracht zu ziehen. Das Hypothesenpaar eines zweiseitigen Binomialtests lautet:

$$\begin{aligned} H_0 : & \quad p = p_0 \\ H_1 : & \quad p \neq p_0 \end{aligned}$$

Der p-Wert des Tests ergibt sich aus den p-Werten der rechts- und linksseitigen Tests durch:

$$p_{2s} = 2 \cdot \min\{P[N_{\alpha,T} \geq k \mid H_0], P[N_{\alpha,T} \leq k \mid H_0]\}.$$

### 5.3.3 Backtesting Expected Shortfall

„The discovery in 2011 that the Expected Shortfall (ES) is not elicitable, diffused the erroneous belief that it could not be backtested.“<sup>106</sup>

Dem Irrglauben, für den ES gäbe es kein Backtesting, setzen [Acerbi u. Szekely \(2014\)](#) drei Tests entgegen, von denen zwei für diese Arbeit verwendet und deshalb im Folgenden wiedergegeben werden.<sup>107</sup>

Dafür bezeichne  $\vec{X} = (X_t)_{t=1,\dots,T}$  die Folge der täglich beobachteten Wertveränderungen eines Portfolios, die als unabhängig, jedoch nicht identisch verteilt angenommen werden.  $X_t$  besitze die tatsächliche, aber unbekannte Verteilungsfunktion  $F_t$  und werde durch die modellierte, auf die Beobachtungen der Vergangenheit bedingte Verteilungsfunktion  $P_t$  vorhergesagt. Unter der Annahme stetiger, strikt monoton wachsender Verteilungsfunktionen ist der ES gegeben durch:<sup>108</sup>

$$ES_{\alpha,t} = -E[X_t \mid X_t + VaR_{\alpha,t} < 0].$$

Die beiden folgenden Testverfahren testen den ES auf eine Risikounterschätzung, d.h. es handelt sich um einseitige Tests, bei denen die Nullhypothese korrekter Vorhersagen dann verworfen wird, wenn die mittleren VaR-Überschreitungen den ES signifikant übersteigen. Die p-Werte der Tests sind in beiden Fällen zu simulieren.

#### Test 1: Backtesting Expected Shortfall nach dem VaR

Dieses Testverfahren setzt eine korrekte VaR-Messung für das Backtesting des ES voraus. Durch Umstellen der bedingten Erwartung aus Gleichung (17) ergibt sich die Gleichung

<sup>106</sup>Vgl. Abstract in [Acerbi u. Szekely \(2014\)](#).

<sup>107</sup>Vgl. in [Acerbi u. Szekely \(2014\)](#) Abschnitt 1 „Backtesting Expected Shortfall“ (insbesondere die Unterabschnitte 1.1 und 1.2 für die jeweiligen Tests) sowie 2.1 „Signifikance“ für die Bestimmung der p-Werte.

<sup>108</sup>Vgl. Gleichung (2) in [Acerbi u. Szekely \(2014\)](#) bzw. Gleichung (17) in Abschnitt 5.1 dieser Arbeit.

$$E \left[ \frac{X_t}{ES_{\alpha,t}} + 1 \mid X_t + VaR_{\alpha,t} < 0 \right] = 0,$$

was die Teststatistik des ersten Testverfahrens motiviert. Bei gegebenem Konfidenzniveau  $\alpha$  ist die Indikatorfunktion von VaR-Überschreitungen gemäß Gleichung (16) gegeben durch  $I_{\alpha,t} = \mathbf{1}_{\{X_t + VaR_{\alpha,t} < 0\}}$ . Die Anzahl der beobachteten VaR-Überschreitungen sei bezeichnet mit  $N_{\alpha,T} = \sum_{i=1}^T I_{\alpha,i}$ . Die Teststatistik sei für  $N_{\alpha,T} > 0$  gegeben durch:

$$Z_1(\vec{X}) = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{X_t I_{\alpha,t}}{ES_{\alpha,t}}}{N_{\alpha,T}} + 1. \quad (22)$$

Für die Ermittlung des ES ist der Rand der Verteilung  $x < -VaR_{\alpha,t}$  der relevante Bereich. Dieser sei für die Verteilung  $P_t$  durch  $P_t^{[\alpha]}(x) = \min(1, P_t(x)/\alpha)$  gegeben. Die Nullhypothese korrekter Risikovorhersagen lässt sich damit formulieren als:

$$H_0 : \quad P_t^{[\alpha]} = F_t^{[\alpha]} \quad \forall t \in 1, \dots, T.$$

Dem steht die Alternativhypothese einer Unterschätzung des ES gegenüber:

$$H_1 : \quad ES_{\alpha,t}^F \geq ES_{\alpha,t} \quad \forall t \text{ und } ES_{\alpha,t}^F > ES_{\alpha,t} \text{ für ein } t; \\ VaR_{\alpha,t}^F = VaR_{\alpha,t} \quad \forall t \in 1, \dots, T.$$

Unter den jeweiligen Hypothesen gilt  $E_{H_0}[Z_1 \mid N_{\alpha,T} > 0] = 0$  bzw.  $E_{H_1}[Z_1 \mid N_{\alpha,T} > 0] < 0$ .<sup>109</sup> Also spräche ein signifikant negativer Wert für  $Z_1(\vec{X})$  gegen die Nullhypothese einer im Sinne konservativer Risikomessung korrekten Modellspezifikation.

### Test 2: direktes Backtesting des Expected Shortfall

Mit Hilfe der Indikatorfunktion  $I_{\alpha,t}$  lässt sich der ES aus Gleichung (17) schreiben als:

$$ES_{\alpha,t} = -E[X_t I_{\alpha,t} \mid I_{\alpha,t} = 1].$$

Aus der iterierten bedingten Erwartung

$$E[X_t I_{\alpha,t}] = E[X_t I_{\alpha,t} \mid I_{\alpha,t} = 1] \cdot \underbrace{P[I_{\alpha,t} = 1]}_{=\alpha} + E[X_t \cdot \underbrace{I_{\alpha,t}}_{=0} \mid I_{\alpha,t} = 0] \cdot P[I_{\alpha,t} = 0] = E[X_t I_{\alpha,t} \mid I_{\alpha,t} = 1] \cdot \alpha$$

folgt also die Darstellung des ES als unbedingter Erwartungswert:

$$ES_{\alpha,t} = -E \left[ \frac{X_t I_{\alpha,t}}{\alpha} \right]. \quad (23)$$

Das motiviert die Festlegung der Teststatistik für den zweiten Fall des ES-Backtestings:

$$Z_2(\vec{X}) = \sum_{t=1}^T \frac{X_t I_{\alpha,t}}{T \alpha ES_{\alpha,t}} + 1. \quad (24)$$

<sup>109</sup>Vgl. Proposition A.2 in [Acerbi u. Szekely \(2014\)](#).

Das Hypothesenpaar lautet:

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & P_t^{[\alpha]} = F_t^{[\alpha]} \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}. \\ H_1 : \quad & ES_{\alpha,t}^F \geq ES_{\alpha,t} \quad \forall t \text{ und } ES_{\alpha,t}^F > ES_{\alpha,t} \text{ für ein } t; \\ & VaR_{\alpha,t}^F \geq VaR_{\alpha,t} \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}. \end{aligned}$$

Unter den jeweiligen Hypothesen gilt  $E_{H_0}[Z_2] = 0$  bzw.  $E_{H_1}[Z_2] < 0$ , d.h. wiederum spräche ein signifikant negativer Wert für  $Z_2(\vec{X})$  gegen die Nullhypothese einer im Sinne konservativer Risikomessung korrekten Modellspezifikation.<sup>110</sup>

### Signifikanz: Simulation der p-Werte

Für beide Teststatistiken  $Z = Z_i$  ( $i = 1, 2$ ) wird die Verteilung  $P_Z$  unter  $H_0$  simuliert, um den p-Wert  $p = P_Z[Z(\vec{x})]$  der Realisation  $Z(\vec{x})$  zu ermitteln. Dafür sei  $M$  die Anzahl simulierter Szenarien. Das schrittweise Vorgehen wird in den Gleichungen (12) in [Acerbi u. Szekely \(2014\)](#) beschrieben:

1. Simulation unabhängiger  $X_t^i \sim P_t$  für alle  $t = 1, \dots, T$  und  $i = 1, \dots, M$ .
2. Berechnung von  $Z^i = Z(\vec{X}^i)$  für  $i = 1, \dots, M$ .
3. Schätzung des p-Wertes durch  $\hat{p} = 1/M \cdot \sum_{i=1}^M \mathbf{1}_{Z^i < Z(\vec{x})}$ .

## 5.4 Erwartungen an die Ergebnisse

Wie in Abschnitt 2.1 aufgeführt, beurteilt die Aufsicht die Güte eines VaR-Modells desto schlechter, je häufiger der tatsächlich eingetretene Verlust größer ist als der errechnete Risikowert. In Abschnitt 5.3.2 wird gezeigt, dass der dieser Beurteilung zu Grunde liegende Basler Ampelstatus sich als rechtsseitiger Binomialtest ausdrücken lässt. Ein im Sinne der Aufsicht gutes Risikomodell ist also in erster Linie ein vorsichtiges.

Gemäß Gleichung (18) in Abschnitt 5.1 ist der VaR in der Historischen Simulation gegeben als (negativer) Szenariowert eines bestimmten Ranges, der sich in Abhängigkeit von Konfidenzniveau, Spiegelung und Anzahl historischer Stichtage  $n \in \mathbb{N}$  ergibt:

$$VaR_\alpha = -S_{\lceil \alpha \cdot (1 + I_S) \cdot n \rceil}.$$

Bei vorgegebener Spiegelungsmethode, d.h. bekanntem Wert der Indikatorfunktion  $I_S$ , und vorgegebenem Konfidenzniveau  $(1 - \alpha)$  ist die den Rang des VaR bestimmende Abbildung  $f_{\alpha, I_S} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , gegeben durch  $f_{\alpha, I_S}(n) = \lceil \alpha \cdot (1 + I_S) \cdot n \rceil$ , eine monoton wachsende Treppenfunktion. Definiere:

$$J_{\alpha, I_S} := \{n \in \mathbb{N} \mid \lceil \alpha \cdot (1 + I_S) \cdot n \rceil + 1 = \lceil \alpha \cdot (1 + I_S) \cdot (n + 1) \rceil\}.$$

Seien  $n_0, n_1 \in J_{\alpha, I_S}$  „benachbarte Elemente“, d.h. für alle  $n_0 < n < n_1$  gelte  $n \notin J_{\alpha, I_S}$ . Dann ist  $f_{\alpha, I_S}$  auf der Menge  $n \in \{n_0 + 1, \dots, n_1\}$  eine konstante Funktion, d.h. hier führt ein wachsender Beobachtungszeitraum  $n$  nicht zu einer Veränderung des den VaR bestimmenden Szenarioranges.

<sup>110</sup>Vgl. Proposition A.3 in [Acerbi u. Szekely \(2014\)](#).

Auf der anderen Seite werden durch zunehmendes  $n \in \{n_0 + 1, \dots, n_1\}$  mehr Szenariowerte zur Ermittlung des VaR in Betracht gezogen. Bei gleichbleibendem Rang kann sich der Wert des VaR durch die Hinzunahme weiterer Szenarien nur erhöhen oder gleich bleiben. Ein höherer VaR bedeutet eine höhere Hürde für eintretende Verluste und damit eine vorsichtiger Risikomessung. Deshalb ist es vorsichtig,  $n \in \{n_0 + 1, \dots, n_1\}$  zu maximieren, d.h.  $n = n_1$  zu wählen. Beobachtungszeiträume  $n \in J_{\alpha, I_S}$  sind also im Sinne einer vorsichtigen VaR-Ermittlung optimal:

- Falls der Beobachtungszeitraum  $n \notin J_{\alpha, I_S}$  ist, so führt die Hinzunahme einer weiteren Beobachtung – d.h. ein Beobachtungszeitraum von  $n + 1$  Tagen – bei gleichbleibendem Szenariorang  $f_{\alpha, I_S}(n + 1) = f_{\alpha, I_S}(n)$  zu einer mindestens genauso vorsichtigen und damit im Sinne der Aufsicht mindestens genauso „guten“ Risikomessung wie mit  $n$  Tagen.
- Falls der Beobachtungszeitraum  $n \in J_{\alpha, I_S}$  ist, so führt die Hinzunahme einer weiteren Beobachtung zu einer Erhöhung des Szenarioranges, d.h.  $f_{\alpha, I_S}(n + 1) = f_{\alpha, I_S}(n) + 1$ . Wie sich das auf den Risikowert auswirkt, kann nicht allgemeingültig beantwortet werden.

Da sich der ES gemäß Gleichung (20) als Durchschnitt der den VaR überschreitenden (negativen) Szenariowerte ermittelt, lässt sich diese Überlegung auf den ES übertragen.

**Anwendung:** Erwartung für die zu betrachtenden Beobachtungszeiträume

Es ist also zu erwarten, dass Beobachtungszeiträume  $n \in J_{\alpha, I_S}$  die Kandidaten für eine im Sinne der Aufsicht optimale VaR-Messung darstellen. Für welche in Abschnitt 5.2 ausgewählten Parametrisierungen das zutrifft, ist in Abhängigkeit des Konfidenzniveaus und der Spiegelungsmethode zu prüfen. Es ist  $I_{OS} = 0$  und  $I_{RS} = I_{VS} = 1$ . In den Abschnitten 5.5 und 5.6 werden Konfidenzniveaus  $\alpha \in \{0,1\%; 1\%; 2,5\%\}$  betrachtet. Damit ist  $1/(\alpha \cdot (1 + I_S)) \in \mathbb{N}$ , und die Menge der in obigem Sinne optimalen Beobachtungszeiträume ist gegeben durch:

$$J_{\alpha, I_S} = \left\{ \frac{1}{\alpha \cdot (1 + I_S)} \cdot k \mid k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Welche gemäß Abschnitt 5.2 zu betrachtenden Beobachtungszeiträume  $n \in \mathbb{N}$  als optimal im Sinne rechtsseitiger Binomialtests und des Basler Ampelstatus zu erwarten sind, ist Tabelle 3 zu entnehmen.

$\alpha$	Spiegelung	rollierend				wachsend
		250	500	750	1000	1250
0,1 %	OS	-	-	-	✓	-
0,1 %	RS, VS	-	✓	-	✓	-
1 %	OS	-	✓	-	✓	-
1 %	RS, VS	✓	✓	✓	✓	✓
2,5 %	OS	-	-	-	✓	-
2,5 %	RS, VS	-	✓	-	✓	-

**Tabelle 3:** Erwartete optimale Beobachtungszeiträume



Für  $\alpha = 0,1\%$  lässt sich daraus insbesondere verallgemeinern, dass im Fall ohne Spiegelung (OS) mit  $I_{OS} = 0$  Beobachtungszeiträume  $1000 \cdot k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und in den Fällen der Renditenspiegelung (RS) und der Verteilungsspiegelung (VS) mit  $I_{RS} = I_{VS} = 1$  Beobachtungszeiträume  $500 \cdot k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  als optimal im Sinne des Basler Ampelstatus zu erwarten sind.

Die Überlegung, welche Parametrisierungen  $(\alpha, I_S, n)$  tatsächlich ein Optimum erreichen, lässt sich verallgemeinern durch die Betrachtung, wie „nahe“ eine Parametrierung an ihrem Optimum liegt: je kleiner der Abstand  $(\lceil \alpha \cdot (1 + I_S) \cdot n \rceil - \alpha \cdot (1 + I_S) \cdot n) \in [0, 1[$  ist, desto besser sollte der erwartete Basler Ampelstatus ausfallen. Die Ergebnisse dieser Überlegung für die in Abschnitt 5.2 ausgewählten rollierenden Beobachtungszeiträume finden sich in Tabelle 30 im Anhang A.3 auf Seite 67.

## 5.5 Auswertung historischer Daten

**Vorüberlegung:** historische Beobachtungen der Risikowerte und ihres Backtestings

Wie in Abschnitt 3.1.2 beschrieben, stehen historische Zinssätze für  $T + 1 = 3725$  Stichtage zwischen dem 06.09.2004 ( $= t_0$ ) und dem 28.03.2019 ( $= t_T$ ) zur Verfügung. Der Zeitraum kann also in  $T = 3724$  Eintagesintervalle  $]t_0, t_1], ]t_1, t_2], \dots, ]t_{T-1}, t_T]$  zerlegt werden. In Abschnitt 5.2 werden rollierende Beobachtungszeiträume von bis zu 1250 Tagen in Betracht gezogen. Damit kann eine Risikoermittlung erstmals zum Auswertungszeitpunkt  $t_{1250}$  mit Prognosehorizont  $t_{1251}$  ( $= 27.07.2009$ ) erfolgen, d.h. es können für  $T - 1250 = 2474$  Stichtage die VaR-Prognosen  $VaR_{\alpha, 1251}, \dots, VaR_{\alpha, T}$  ermittelt werden. Dem stehen die Backtestingergebnisse  $I_{\alpha, 1251}, \dots, I_{\alpha, T}$  gegenüber. Analog zum VaR können in dem Zeitraum die ES-Prognosen  $ES_{\alpha, 1251}, \dots, ES_{\alpha, T}$  ermittelt und durch ein Backtesting überprüft werden.

Die Parametrisierung mit wachsendem Beobachtungszeitraum bezieht zum ersten Stichtag  $t_{1250}$  die maximal vorhandene Anzahl  $n = 1250$  Szenarien in Betracht. Im Zeitverlauf verlängert sich die Historie dann immer weiter, so dass zuletzt in  $t_T$  die Anzahl der Szenarien  $n = T = 3724$  beträgt. In den Ergebnistabellen sei diese Parametrisierung deshalb mit  $n = 3724$  bezeichnet. Für die VaR-Prognosen zum Auswertungszeitpunkt  $t_T$  lassen sich allerdings mangels der noch nicht beobachteten Wertveränderung im Intervall  $]t_T, t_{T+1}]$  keine Backtestingergebnisse beobachten, weshalb sie auch nicht betrachtet werden.

Für die Position der Musterbank aus Abschnitt 2.2 sind die Zinssätze mit Laufzeiten  $\tau \leq 10$  Jahre die relevanten Risikofaktoren. Da die Zinssätze selbst beobachtbar sind, werden für jeden Stichtag  $t_s \in \{t_{1250}, \dots, t_{T-1}\}$  die Zinsszenarien  $(i_{\tau, t_s} + (i_{\tau, t_s-j+1} - i_{\tau, t_s-j}))_{\tau \leq 10}$  für  $j = 1, \dots, n$  gemäß der Beschreibung in Abschnitt 5.1 simuliert. Für die Spiegelungsmethode RS werden zusätzlich die gespiegelten Zinsszenarien  $(i_{\tau, t_s} - (i_{\tau, t_s-j+1} - i_{\tau, t_s-j}))_{\tau \leq 10}$  und für die Spiegelungsmethode VS die gespiegelten Szenariowerte  $-S_{t_s}^j$  für  $j = 1, \dots, n$  in die Risikoermittlung einbezogen. Abhängig von der Spiegelungsmethode lässt sich die Anzahl der simulierten Szenarien mit Hilfe der Spiegelungsindikatorfunktion  $I_S$  aus Abschnitt 5.1 durch  $(1 + I_S) \cdot n$  schreiben. Die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit aller Szenarien in der klassischen Historischen Simulation beträgt demzufolge  $1/((1 + I_S) \cdot n)$ .

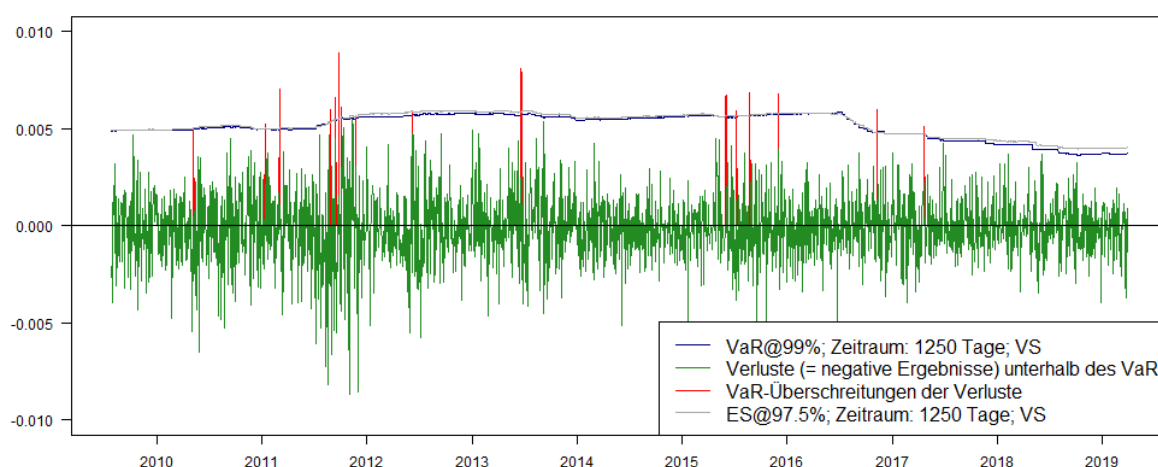
**Berechnung:** auszuwertende Kennzahlen

Wie in Abschnitt 5.1 bemerkt, ist der Value at Risk (VaR) zum Konfidenzniveau 99,9 % der neue,

durch die deutsche Aufsicht geforderte Mindeststandard für die Risikomessung und steht damit im Fokus der weiteren Analysen. Um die Genauigkeit der Risikomessung am Verteilungsrand nicht nur für diese sehr vorsichtige Parametrisierung zu prüfen, sondern ein breiteres Bild zu bekommen, wird auch der alte Standard des VaR zum Konfidenzniveau 99,0 % sowie – äquivalent dazu – der Expected Shortfall (ES) zum Level 97,5 % in die Analysen einbezogen. In Abschnitt 5.3.3 wird für die erste Methode des ES-Backtestings eine korrekte VaR-Parametrisierung vorausgesetzt. Um diese für den  $ES_{0,025}$  zu überprüfen, wird auch der VaR zum Konfidenzniveau 97,5 % betrachtet. Umgekehrt wird ergänzend zum  $VaR_{0,01}$  auch der  $ES_{0,01}$  betrachtet.

In der historischen Analyse werden damit folgende Kennzahlen ermittelt:

- Der Value at Risk (VaR) zu den Konfidenzniveaus 99,9 %, 99,0 % und 97,5 %, die dazugehörigen Basler Ampelstatus sowie die p-Werte der ein- und zweiseitigen Binomialtests.
- Der Expected Shortfall (ES) zu den Leveln 99,0 % und 97,5 % sowie die Ergebnisse der beiden in Abschnitt 5.3.3 behandelten Tests. Für die Ermittlung der p-Werte werden jeweils  $M = 10000$  Simulationen gerechnet.<sup>111</sup>
- Zusätzlich zu den Risiko- und deren Backtestingergebnissen werden jeweils die Höhe der Risikowerte<sup>112</sup> sowie das Risikoreagibilitätskriterium (RRK) für jedes Risikomaß bzw. jede Parametrisierung ausgewiesen.



**Abbildung 15:** Historische Risikowerte für  $VaR_{0,01}$  und  $ES_{0,025}$  mit einem Beobachtungszeitraum von fünf Jahren und gespiegelter Verteilung (VS) sowie historische VaR-Backtestingergebnisse

### Ergebnisse: Auswertung der Kennzahlen

Für die im Fokus stehende Risikoermittlung mittels VaR zum Konfidenzniveau 99,9 % kann aus Tabelle 31 Folgendes abgelesen werden:

<sup>111</sup>Wesentlich höhere Simulationszahlen sind nicht vereinbar mit den zur Analyse vorhandenen Systemressourcen.

<sup>112</sup>In den Ergebnistabellen 31, 32, 33, 34 und 35 werden im Anhang A.3 ab Seite 68 jeweils das Minimum, der Median und das Maximum aller Risikowerte ausgegeben.

- Der Basler Ampelstatus ist – unabhängig von der Spiegelungsmethode – für Beobachtungszeiträume  $n > 250$  Tage grün und für  $n = 250$  Tage gelb.
- Sowohl der einseitige als auch der zweiseitige Binomialtest lehnen die Nullhypothese einer vorsichtigen bzw. richtigen Risikomessung für  $n = 250$  Tage in allen drei Fällen der Spiegelung auf einem Signifikanzniveau von 5 % ab.
- Für  $n > 250$  Tage wird für alle Spiegelungsmethoden weder der einseitige noch der zweiseitige Binomialtest auf einem Signifikanzniveau von 5 % abgelehnt.
- Die mittlere Höhe der Risikowerte liegt für  $n = 750$  Tage mit einer der beiden Spiegelungsmethoden deutlich unter dem mittleren Risikowert ohne Spiegelung und den mittleren Risikowerten für  $n = 500$  oder  $n > 750$  Tagen.
- Das RRK ist für  $n < 1250$  Tagen stets negativ und wächst tendenziell mit wachsendem  $n$ , allerdings nicht-monoton und abhängig von der Spiegelungsmethode.

Aus Tabelle 32 kann für die Risikoermittlung mittels VaR zum Konfidenzniveau 99,0 % eine in allen Fällen angemessene Risikoermittlung abgelesen werden: der Basler Ampelstatus ist stets grün und die p-Werte der Binomialtests liegen in allen Fällen über 5 %. Die mittleren Risikoniveaus unterscheiden sich zwischen den verschiedenen Parametrisierungen weniger deutlich als bei 99,9 %; außerdem ist die Spanne der Risikowerte der einzelnen Parametrisierungen in der Regel kleiner. Ein Zusammenhang zwischen RRK und Beobachtungsperiode  $n$  ist hier nicht erkennbar. Das Backtesting des ES zum Level 99,0 % zeigt in Tabelle 34 nur eine Auffälligkeit für  $n = 250$  Tage ohne Spiegelung, wo der p-Wert des zweiten Tests bei 1,4 % und damit unterhalb der Schwelle von 5 % liegt.

Das Backtesting des ES zum Level 97,5 % zeigt in Tabelle 35 Auffälligkeiten für den wachsenden Beobachtungszeitraum  $1250 \leq n \leq 3724$ . Hier liegen die p-Werte des ersten Tests bei zwei von drei Spiegelungsmethoden (OS und RS) unterhalb und bei einer Spiegelungsmethode (VS) knapp oberhalb der Schwelle von 5 %. Für dieses Testverfahren wird eine korrekte VaR-Parametrisierung vorausgesetzt. Aus Tabelle 33 kann aber erkannt werden, dass die VaR-Messung zum Konfidenzniveau 97,5 % für große Beobachtungszeiträume zu vorsichtig ist: der zweiseitige Binomialtest lehnt die Nullhypothese eines korrekt spezifizierten VaR für  $n \geq 1000$  Tage bei einem Signifikanzniveau von 5 % ab. Hier liegt die durchschnittliche Anzahl erreichter VaR-Überschreitungen zu weit unter dem Erwartungswert. Der einseitige Binomialtest verwirft die Nullhypothese einer vorsichtigen Spezifizierung dagegen nicht.

#### **Zusammenfassung:** Ergebnisse der historischen Risikomessung

- Ein Beobachtungszeitraum von  $n = 250$  Tagen ist bei der VaR-Messung auf dem Konfidenzniveau von 99,9 % zu kurz. Dagegen sind Beobachtungszeiträume mit  $n \geq 500$  Tagen für die Risikomessung mit allen Spiegelungsmethoden zulässig.
- Zum Konfidenzniveau 99,9 % ist ein gespiegelter Beobachtungszeitraum von  $n = 750$  Tagen die zulässige Methode mit dem geringsten mittleren Risikowert.

- Die VaR-Messung zum Konfidenzniveau 97,5 % ist für große Beobachtungszeiträume  $n \geq 1000$  Tage zwar vorsichtig, aber nicht genau.
- Wesentliche Unterschiede zwischen den Methoden Renditenspiegelung (RS) und Verteilungsspiegelung (VS) sind nicht festzustellen.
- Neben den in Abschnitt 5.4 dieser Arbeit als optimal im Sinne des Basler Ampelstatus identifizierten Parametrisierungen weisen auch in diesem Sinne nicht-optimale Parametrisierungen trotzdem akzeptable Backtestingergebnisse auf. Die historische Stichprobe ist möglicherweise zu klein, um optimale von nicht-optimalen Parametrisierungen zu unterscheiden.

Aus dieser Zusammenfassung könnte geschlussfolgert werden, dass der Beobachtungszeitraum mit  $n = 750$  Tagen zu wählen sei und entsprechend auf eine der beiden Weisen gespiegelt werden sollte. Jedoch gibt es auf Grundlage der historischen Beobachtungen noch kein klar zu bevorzugendes Modell. Der Verlauf der historischen Volatilität zeigt darüber hinaus seit ihrem Höhepunkt 2012, mit Ausnahme unruhiger Phasen 2013 und 2016, den Trend einer Beruhigung.<sup>113</sup> Es besteht die Möglichkeit, nach einem möglichen erneuten Anstieg der Marktvolatilität, zu einer anderen Schlussfolgerung zu gelangen, d.h. bei einer Entscheidung allein auf Grundlage der historischen Daten besteht die Gefahr einer Überanpassung des Modells an die gesammelten Beobachtungen. Deshalb sollen neben den Beobachtungen des historisch eingetretenen Pfades auch Beobachtungen fiktiver Pfade simuliert und entsprechend ausgewertet werden.

## 5.6 Auswertung fiktiver, simulierter Pfade

Alternativ zum eingetretenen Pfad der historischen Wertveränderungen sollen in diesem Abschnitt auch andere, fiktive Pfade betrachtet werden. Diese werden auf Grundlage des in Abschnitt 4.2 gefundenen Modells simuliert. Anschließend werden entlang jedes Pfades die Risikowerte ermittelt und jeweils durch ihr Backtesting überprüft.

### Simulation: Vorgehen zur Erzeugung der fiktiven Pfade

Die Simulation erfolgt mit Hilfe der Funktion `ugarchpath` aus dem Paket `rugarch` auf Grundlage des Modells aus Gleichung (13). Die Simulation wird wie folgt parametrisiert:

- Um die Simulation „anzuheizen“, d.h. um die simulierten Pfade weniger abhängig von ihren Startwerten zu machen, werden die ersten 1000 simulierten Werte als „burn-in sample“ ignoriert, bevor die eigentliche Aufzeichnung des simulierten Pfades beginnt.
- **Länge der Pfade:** Historisch können Bewertungen für 3725 Stichtage, d.h. 3724 Bewertungsdifferenzen, beobachtet werden.<sup>114</sup> Um eine ähnliche Anzahl an Beobachtungen je Pfad zu simulieren, wird die Pfadlänge auf **4000** Beobachtungen festgelegt.
- Die auf Grundlage des Modells aus Gleichung (13) simulierten Logrenditen  $(r_t)_{t=1,\dots,4000}$  werden durch  $R_t = \exp(r_t) - 1$  in Renditen  $(R_t)_{t=1,\dots,4000}$  umgerechnet.

<sup>113</sup>Vgl. Abbildungen 8 auf Seite 20 und 12 auf Seite 27.

<sup>114</sup>Vgl. Abschnitt 3.1.2 dieser Arbeit.

- **Anzahl Pfade:** Insgesamt werden **10000** Pfade simuliert.
- Da die anschließende Risikoermittlung sehr rechenintensiv ist, um Speicherplatzprobleme zu umgehen und um die anschließende Risikoberechnung abschnittsweise durchführbar zu machen, werden die simulierten Pfade in 100 Partitionen à 100 simulierten Pfaden aufgeteilt.

**Berechnung:** auszuwertende Kennzahlen

Die Auswertung des historischen Pfades in Abschnitt 5.5 zeigt, dass die Simulation der p-Werte für das Backtesting des Expected Shortfall die mit Abstand rechenintensivsten Kennzahlen sind. Dabei bringen die Ergebnisse des ES-Backtestings keine wesentliche Erkenntnis. Ebenso trägt das Risikoreagibilitätskriterium (RRK) keinen entscheidenden Erkenntnisgewinn für die historischen Daten bei. Um den Rechenaufwand für die Simulation von Risiko- und Backtestingkennzahlen zu reduzieren, werden die auszuwertenden Kennzahlen und Methoden gegenüber Abschnitt 5.5 wie folgt eingeschränkt:

- Auf die Berechnung und das Backtesting des Expected Shortfall (ES) wird verzichtet.
- Ohne den ES zum Level 97,5 % wird auch der VaR auf diesem Konfidenzniveau nicht mehr benötigt.
- Das Risikoreagibilitätskriterium (RRK) wird nicht ermittelt.

Der Fokus liegt weiterhin in erster Linie auf dem VaR zum Konfidenzniveau von 99,9 % sowie dem dazugehörigen Backtesting durch den Basler Ampelstatus bzw. durch die entsprechenden Binomialtests. In zweiter Linie werden auch die entsprechenden Ergebnisse zum Konfidenzniveau von 99,0 % betrachtet.

**Methode:** Risikoermittlung anhand beobachteter Renditen

Mit der Simulation werden fiktive Beobachtungen der Renditen des GI10 erzeugt. Da die Bewertung einer Zinsposition mit mehreren Zahlungsterminen keine injektive Abbildung ist, lässt sich aus einer gegebenen Rendite die ihr zu Grunde liegende Veränderung der Zinsstruktur nicht mehr eindeutig bestimmen, d.h. in der Historischen Simulation können anhand der simulierten Renditen keine Zinsszenarien simuliert werden. Stattdessen wird alternativ, wie in Abschnitt 5.1 beschrieben, das Risiko anhand der beobachteten Renditen ermittelt. Da die Zinsen nicht beobachtbar sind und keine Zinsszenarien simuliert werden, wird auf die Methode der Renditenspiegelung (RS) verzichtet. Die Methode der Verteilungsspiegelung (VS) lässt sich durch Umkehrung des Vorzeichens der Szenariowerte aber weiterhin einfach ermitteln.

Es werden im Folgenden die gleichen Beobachtungszeiträume wie in Abschnitt 5.5, d.h. die fünf rollierenden Beobachtungszeiträume  $n \in \{250, 500, 750, 1000, 1250\}$  und der variable, wachsende Beobachtungszeitraum  $n \geq 1250$ , jeweils ohne Spiegelung (OS) und mit Verteilungsspiegelung (VS) betrachtet. Das Risiko wird als VaR zu den Konfidenzniveaus 99,9 % und 99,0 % ermittelt. Es wird also mit  $(5 + 1) \times 2 \times 2 = 24$  verschiedenen Methoden das Risiko ermittelt.

**Ergebnisse:** Auswertung der Kennzahlen

Analog zur Vorüberlegung in Abschnitt 5.5 können je Pfad  $T = 4000$  simulierte Renditen der (gedachten) Zeitintervalle  $[t_0, t_1], \dots, [t_{T-1}, t_T]$  beobachtet werden. 1250 Beobachtungen werden benötigt,

um erstmals an  $t_{1250}$  ein Risiko ermitteln zu können. Zum Zeitpunkt  $t_{T-1} = t_{3999}$  wird der letzte, durch die Rendite  $R_{4000}$  des Zeitintervalls  $]t_{3999}, t_{4000}]$  durch das Backtesting zu validierende Risikowert ermittelt. Damit können je Pfad also  $T - 1250 = 2750$  Backtestingergebnisse beobachtet werden. Die Risikoberechnung mit wachsendem Beobachtungszeitraum wird mit der zuletzt erreichten, maximalen Länge für  $n = T - 1 = 3999$  indiziert.

Die **Ergebnisse des Basler Ampelstatus zum Konfidenzniveau von 99,9 %** zeigen:<sup>115</sup>

- Für die rollierenden Beobachtungszeiträume  $n \in \{250, 500, 1250\}$  sowie den wachsenden Beobachtungszeitraum  $n \geq 1250$  ist der Anteil aller Pfade mit Grünstatus bei gespiegelter Verteilung (VS) höher als bei ungespiegelter (OS). In diesen Fällen ist jeweils auch der Anteil der Pfade mit Rotstatus bei gespiegelter Verteilung geringer als bei ungespiegelter.
- Bei den rollierenden Beobachtungszeiträumen  $n \in \{750, 1000\}$  ist die Verteilung des Basler Ampelstatus im Hinblick auf Rot- und Grünstatus ohne Spiegelung (OS) marginal besser als mit Verteilungsspiegelung (VS).
- Diese Ergebnisse stehen im Einklang mit den Überlegungen aus Abschnitt 5.4 bezüglich einer im Sinne des Basler Ampelstatus optimalen Risikomessung, wonach der Basler Ampelstatus desto besser zu erwarten ist, je näher eine Parametrisierung am Optimum liegt.<sup>116</sup>
- Liegt die Anzahl der Szenarien  $(1 + I_S) \cdot n < 750$ , so ist die Verteilung des Basler Ampelstatus im Hinblick auf Rot- und Grünstatus wesentlich ungünstiger als mit  $(1 + I_S) \cdot n \geq 750$  Szenarien.
- Die beste Verteilung des Basler Ampelstatus im Hinblick auf Rot- und Grünstatus haben die Beobachtungszeiträume mit  $n = 500$  Tagen (VS) oder  $n = 1000$  Tagen (OS/VS). Das deckt sich mit der Erwartungshaltung.<sup>117</sup>

Bei Voraussetzung eines Signifikanzniveaus von 5 % für die Binomialtests fällt auf, dass sich die Anteile der Pfade mit abgelehnter Nullhypothese jeweils zwischen ein- und zweiseitigem Test nicht unterscheiden.<sup>118</sup> Das ist jedoch kein Fehler, sondern der geringen „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $\alpha = 0,1$  % geschuldet: nur bei bis zu  $k \leq 5$  VaR-Überschreitungen unterscheiden sich die p-Werte zwischen Tests auf „vorsichtige“ und „genaue“ Risikomessung überhaupt, jedoch würde in diesen Fällen die Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau von 5 % einhellig nicht abgelehnt werden.<sup>119</sup> Der p-Wert des einseitigen Tests überschreitet also die Schwelle von 5 % genau dann, wenn auch der p-Wert des zweiseitigen Tests diese Schwelle überschreitet.

Ähnlich wie die Verteilung des Basler Ampelstatus zeigen die **Ergebnisse der Binomialtests** für  $\alpha = 0,1\%$ , dass Beobachtungszeiträume mit  $(1 + I_S) \cdot n < 750$  Szenarien deutlich schlechter als andere abschneiden. Dagegen schneiden die Beobachtungszeiträume mit  $n = 500$  Tagen (VS) oder  $n = 1000$  Tagen (OS/VS) mit mehr als 90 % nicht abgelehnter Tests am besten ab.

Die **Ergebnisse des Basler Ampelstatus zum Konfidenzniveau von 99,0 %** zeigen:<sup>120</sup>

<sup>115</sup>Vgl. im Anhang A.3 Abbildung 22 auf Seite 74 sowie ergänzend dazu Tabelle 36 auf Seite 71.

<sup>116</sup>Vgl. Tabelle 30 im Anhang A.3 auf Seite 67.

<sup>117</sup>Vgl. Tabelle 3 in Abschnitt 5.4 auf Seite 41.

<sup>118</sup>Vgl. Tabelle 36 im Anhang A.3 auf Seite 71.

<sup>119</sup>Vgl. Tabelle 38 im Anhang A.3 auf Seite 73.

<sup>120</sup>Vgl. im Anhang A.3 Abbildung 23 auf Seite 74 sowie ergänzend dazu Tabelle 37 auf Seite 72.

- Der Anteil der Pfade mit Rotstatus ist bei wachsendem Beobachtungszeitraum  $n \geq 1250$  mit jeweils rund 9 % wesentlich höher als bei allen betrachteten rollierenden Beobachtungszeiträumen mit bis zu rund 2 %.
- Der Anteil der Pfade mit Grünstatus liegt bei Beobachtungszeiträumen mit  $(1 + I_S) \cdot n > 250$  Szenarien bei mindestens zwei Drittel. Dagegen ist der Anteil der Pfade mit Grünstatus bei  $n = 250$  Tagen (OS) mit rund 40 % deutlich geringer.
- Die auf dem Konfidenzniveau von 99,9 % als optimal identifizierten Beobachtungszeiträume mit  $n = 500$  Tagen (VS) oder  $n = 1000$  Tagen (OS/VS) zählen auf dem Konfidenzniveau 99,0 % ebenfalls zu den Parametrisierungen mit guter Verteilung des Basler Ampelstatus. Der Anteil an Pfaden mit Rotstatus ist für  $n = 500$  Tage (VS) geringer als für  $n = 1000$  Tage.
- Die Ergebnisse decken sich mit den Erwartungen aus Abschnitt 5.4 dieser Arbeit.

Im Gegensatz zum Konfidenzniveau 99,9 % weichen die **Ergebnisse der ein- und zweiseitigen Binomialtests auf dem Konfidenzniveau 99,0 %** voneinander ab. Die Testergebnisse fallen dabei – ähnlich wie die Verteilung des Basler Ampelstatus – für die Beobachtungszeiträume  $n = 250$  Tage rollierend (OS) sowie für  $n \geq 1250$  Tage wachsend (OS/VS) wesentlich ungünstiger aus als für andere Parametrisierungen.

#### **Zusammenfassung:** Ergebnisse der Risikomessung fiktiver Pfade

Für die VaR-Messung zum Konfidenzniveau von 99,9 % wird die Erwartungshaltung aus Abschnitt 5.4 getroffen, Beobachtungszeiträume mit  $n = 500$  Tagen (VS) oder  $n = 1000$  Tagen (OS/VS) weisen die besten Ergebnisse auf. Deren Güte unterscheidet sich nur unwesentlich, d.h. die Länge des Beobachtungszeitraums  $n \in \mathbb{N}$  und die Spiegelungsmethode wirken sich in erster Linie durch ihren Einfluss auf die Nähe der Parametrisierung zu ihrem Optimum im Sinne der Betrachtungen in Abschnitt 5.4 auf die Güte der Risikomessung aus.

Auch die Ergebnisse zum Konfidenzniveau von 99,0 % decken sich mit diesen Erwartungen:

- Ein variabel wachsender Beobachtungszeitraum führt gegenüber rollierenden Beobachtungszeiträumen auf dem Konfidenzniveau von 99,0 % zu einer Verschlechterung der Risikomessung.
- Eine Risikomessung mit weniger als 500 Szenarien weist wesentlich schlechtere Ergebnisse auf als eine Risikomessung mit mindestens 500 Szenarien.
- Die Beobachtungszeiträume mit  $n = 500$  Tagen (VS) oder  $n = 1000$  Tagen (OS/VS) weisen auch auf dem Konfidenzniveau von 99,0 % gute Ergebnisse auf.

Aus den Ergebnissen der simulierten Pfade lassen sich unter der Prämisse einer VaR-Messung zum Konfidenzniveau  $(1 - \alpha) = 99,9\%$  also ein gespiegelter Beobachtungszeitraum von  $n = 500$  Tagen sowie ein – gespiegelter wie auch ungespiegelter – Beobachtungszeitraum von  $n = 1000$  Tagen als beste Methoden festhalten, was sich theoretisch begründen lässt und die Erwartungen erfüllt.

## 5.7 Nachbemerking zur Definition des VaR

Den vorangegangenen Ergebnissen liegt die Definition des VaR gemäß Gleichung (15) in Abschnitt 5.1 dieser Arbeit zu Grunde. Föllmer u. Schied (2002) definieren den VaR zum Konfidenzniveau  $(1 - \alpha)$  einer Position zum Auswertungszeitpunkt  $t$  für den Prognosezeitpunkt  $t + 1$  dagegen wie folgt:<sup>121</sup>

$$VaR_{\alpha,t+1} = -\inf \{x \in \mathbb{R} \mid F_{t+1}(x) > \alpha\}. \quad (25)$$

Durch die strikte Ungleichung in der Bedingung  $F_{t+1}(x) > \alpha$  verändert sich der Rang des den VaR bestimmenden Szenarios. Dazu sei folgende Fallunterscheidung betrachtet, wobei  $\lfloor \cdot \rfloor$  analog zu Gleichung (19) in Abschnitt 5.1 die Abrundungsfunktion bezeichne. Die empirische Verteilungsfunktion  $\hat{F}_{t+1}$  ist wie in Abschnitt 5.1 eine Stufenfunktion mit dem diskreten Wertebereich  $\left\{k \cdot \frac{1}{(1+I_S) \cdot n} \mid k = 0, \dots, (1+I_S) \cdot n\right\} \subset [0,1]$ .

1. Sei  $\alpha \in ]\frac{k-1}{(1+I_S) \cdot n}, \frac{k}{(1+I_S) \cdot n}[ \iff k-1 < \alpha \cdot (1+I_S) \cdot n < k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Damit ist  $k = \lceil \alpha \cdot (1+I_S) \cdot n \rceil = \lfloor \alpha \cdot (1+I_S) \cdot n \rfloor + 1$  und es gilt:

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid \hat{F}_{t+1}(x) > \alpha > \frac{k-1}{(1+I_S) \cdot n}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \hat{F}_{t+1}(x) \geq \frac{k}{(1+I_S) \cdot n} > \alpha\right\} = [S_k, \infty[.$$

2. Sei  $\alpha = \frac{k}{(1+I_S) \cdot n}$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist:

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid \hat{F}_{t+1}(x) > \alpha = \frac{k}{(1+I_S) \cdot n}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \hat{F}_{t+1}(x) \geq \frac{k+1}{(1+I_S) \cdot n}\right\} = [S_{k+1}, \infty[.$$

Die VaR-Schätzung in der Historischen Simulation würde gemäß Gleichung (25) also jeweils bestimmt durch das Szenario vom Rang  $g_{\alpha, I_S}(n) = (\lfloor \alpha \cdot (1+I_S) \cdot n \rfloor + 1)$ . Falls  $\alpha \cdot (1+I_S) \cdot n \in \mathbb{N}$ , so unterscheidet sich dieser von dem Rang  $f_{\alpha, I_S}(n) = \lceil \alpha \cdot (1+I_S) \cdot n \rceil$  in Gleichung (18) gemäß vorheriger Definition des VaR. Die Sprünge der Rangfunktion verschieben sich durch die obige Definition des VaR um einen Schritt nach vorne:

$$g_{\alpha, I_S}(n) = \begin{cases} f_{\alpha, I_S}(n), & \text{falls } \alpha \cdot (1+I_S) \cdot n \notin \mathbb{N}; \\ f_{\alpha, I_S}(n) + 1, & \text{falls } \alpha \cdot (1+I_S) \cdot n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Die Menge der als optimal im Sinne einer vorsichtigen Risikomessung erwarteten Beobachtungszeiträume wäre gegeben durch:

$$K_{\alpha, I_S} := \{n \in \mathbb{N} \mid \lfloor \alpha \cdot (1+I_S) \cdot n \rfloor + 1 = \lfloor \alpha \cdot (1+I_S) \cdot (n+1) \rfloor\}.$$

Für Konfidenzniveaus  $\alpha \in \{0,1\%; 1\%; 2,5\%\}$  ist  $1/(\alpha \cdot (1+I_S)) \in \mathbb{N}$ , und die Menge der erwarteten optimalen Beobachtungszeiträume ließe sich vereinfacht darstellen als:

$$K_{\alpha, I_S} = \left\{ \frac{k}{\alpha \cdot (1+I_S)} - 1 \mid k \in \mathbb{N} \right\}.$$

<sup>121</sup>Vgl. Definition 4.27 in Föllmer u. Schied (2002).



Für  $\alpha = 0,1\%$  ließe sich daraus insbesondere folgern, dass im Fall ohne Spiegelung (OS) mit  $I_{OS} = 0$  Beobachtungszeiträume  $(1000 \cdot k - 1)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und in den Fällen der Renditenspiegelung (RS) und der Verteilungsspiegelung (VS) mit  $I_{RS} = I_{VS} = 1$  Beobachtungszeiträume  $(500 \cdot k - 1)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  als optimal im Sinne des Basler Ampelstatus zu erwarten wären. Der Abstand zum Optimum wäre gegeben durch:

$$(\lfloor \alpha \cdot (1 + I_S) \cdot n \rfloor + 1 - \alpha \cdot (1 + I_S) \cdot n) \in ]0,1].$$

Analog zu Tabelle 30 im Anhang A.3 auf Seite 67 wäre dieser für die Parametrisierungen  $(\alpha, I_S, n)$  aus Abschnitt 5.2 mit rollierenden Beobachtungszeiträumen wie folgt gegeben:

$\alpha$	Spiegelung	rollierend				
		250	500	750	1000	1250
0,1 %	OS	0,75	0,50	0,25	1,00	0,75
0,1 %	RS, VS	0,50	1,00	0,50	1,00	0,50
1 %	OS	0,50	1,00	0,50	1,00	0,50
1 %	RS, VS	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2,5 %	OS	0,75	0,50	0,25	1,00	0,75
2,5 %	RS, VS	0,50	1,00	0,50	1,00	0,50

**Tabelle 4:** Abstand zur erwarteten optimalen Parametrisierung  $(\lfloor \alpha \cdot (1 + I_S) \cdot n \rfloor + 1 - \alpha \cdot (1 + I_S) \cdot n) \in ]0,1]$  für rollierende Beobachtungszeiträume  $n \in \mathbb{N}$  bei Definition des VaR gemäß Föllmer u. Schied (2002)

**Fazit:** Gemäß der VaR-Definition dieses Abschnitts wären gerade die Beobachtungszeiträume am ungünstigsten, die gemäß der für diese Arbeit verwendeten VaR-Definition als optimal identifiziert werden.<sup>122</sup> Das liegt an der Verschiebung der Sprünge der Rangfunktion um einen Schritt nach vorne. Ist nach den vorherigen Überlegungen in Abschnitt 5.4 ein Beobachtungszeitraum  $n \in J_{\alpha, I_S}$  optimal, so wäre nach der VaR-Definition dieses Abschnitts der Beobachtungszeitraum  $(n - 1) \in K_{\alpha, I_S}$  als optimal im Sinne einer vorsichtigen Risikomessung zu erwarten.

<sup>122</sup>Vgl. Tabelle 4 in diesem Abschnitt sowie Tabelle 3 in Abschnitt 5.4 auf Seite 41.

## 6 Schlussfolgerung

Die Frage nach dem optimalen Beobachtungszeitraum in der Historischen Simulation kann nicht allgemeingültig beantwortet werden, sondern ist mit Bezug auf die zu betrachtende Position zu treffen.<sup>123</sup> Die Analysen und Ergebnisse dieser Arbeit beziehen sich auf die in Abschnitt 2.2 definierte Zinsposition des „gleitenden Zehners“, einer für die passive Fristentransformation oder die Eigenkapitalanlage bedeutenden Strategie.

Das Risiko als Gefahr eines drohenden Wertverlustes einer Position hängt eng mit deren aktueller Schwankungsbreite der Wertveränderungen – d.h. deren bedingter Volatilität – zusammen. Ihre Schätzung wird aus einer Zeitreihenanalyse für einen die Wertveränderungen der Zinsposition des „gleitenden Zehners“ repräsentierenden Index in Abschnitt 4.2 gewonnen. Die Forderung der deutschen Aufsicht, „Auswirkungen von stärkeren Parameterveränderungen bei der Risikoermittlung angemessen zu berücksichtigen“<sup>124</sup>, wird so verstanden, dass sich im Beobachtungszeitraum stets Stichtage mit erhöhter bedingter Volatilität befinden sollten. Ziel der Auswertung der bedingten Volatilitätsschätzung in Abschnitt 4.3 ist es deshalb zu bestimmen, wie lange die zeitlichen Abstände zwischen unruhigen Marktphasen mit erhöhten Wertschwankungen in der Historie sind. Dafür werden die Methode gleitender Durchschnitte und ein Modell zur Identifikation von Strukturbrüchen herangezogen. Daraus lässt sich eine Bandbreite für den Beobachtungszeitraum ableiten, die – abhängig von der Parametrisierung der Methoden bzw. des Modells – allerdings hoch ist und die Frage nach einer optimalen Wahl noch nicht beantwortet.

Auf Grundlage der Ergebnisse aus Kapitel 4 werden in Abschnitt 5.2 Kandidaten für die Parametrisierung des Beobachtungszeitraums abgeleitet.

Die Güte der Risikoermittlung wird durch vom Risikomaß abhängige Backtestingverfahren gemessen. Für das Risikomaß des Value at Risk (VaR) gibt es von Seiten der Aufsicht klare Regeln zum Vorgehen und klare Grenzen der Akzeptanz. Deshalb wird die Frage nach dem optimalen Beobachtungszeitraum in der Historischen Simulation schließlich anhand der Güte der VaR-Ermittlung beantwortet. Letztere wird vor allem bestimmt durch den Basler Ampelstatus, der auf einem rechtsseitigen Binomialtest basiert: je weniger Überschreitungen der Risikowerte zugelassen werden, desto besser wird das Modell beurteilt.<sup>125</sup> Überlegungen zur Risikomessung in der Historischen Simulation führen zur Formulierung einer Erwartung optimaler Beobachtungszeiträume im Sinne einer vorsichtigen Risikomessung in Abschnitt 5.4.

In Abschnitt 5.5 werden für die historischen Daten Risiken ermittelt und Backtestingergebnisse beobachtet. Der Zeitraum der historischen Marktdaten<sup>126</sup> von 2004 bis 2019 ist dabei geprägt von einer Beunruhigung des Marktes im Rahmen der Finanzmarktkrise sowie einem allmählichen Abklingen der Volatilität seit 2012.<sup>127</sup> Die Ergebnisse zeigen für die meisten betrachteten Beobachtungszeiträume akzeptable Ergebnisse. Lediglich die von der Aufsicht geforderte Mindestperiode von 250 Tagen erweist sich hier bereits als schwächer. Wird der Rand der Verteilung etwas weiter betrachtet und

<sup>123</sup>Vgl. Abschnitt 2.1 dieser Arbeit.

<sup>124</sup>Vgl. Seite 17, Abschnitt „5.3.2. Weiterführende Hinweise zur Risikoquantifizierung“, Absatz 60 in [BaFin \(2018a\)](#) bzw. Abschnitt 2.1 dieser Arbeit.

<sup>125</sup>Vgl. Seite 74, Abschnitt „Backtesting“ in [Deutsche Bundesbank \(1998\)](#) bzw. Abschnitt 2.1 dieser Arbeit.

<sup>126</sup>Vgl. Kapitel 3 dieser Arbeit.

<sup>127</sup>Vgl. z.B. Abbildung 8 auf Seite 20 und Abbildung 12 auf Seite 27.

das VaR-Backtesting auf dem Konfidenzniveau von 97,5 % mit in die Betrachtung einbezogen, so zeigt sich, dass Beobachtungszeiträume ab 1000 Tagen zu einer zwar konservativen, aber ungenauen Risikomessung führen können. Andere Kennzahlen wie ein Risikoreagibilitätskriterium (RRK) oder ein Backtesting des Expected Shortfall (ES) werden in Abschnitt 5.3 eingeführt und ebenfalls berechnet. Ihre Ergebnisse tragen jedoch zur Identifizierung optimaler Parametrisierungen wenig Erkenntnis bei.

Um eine Überanpassung des Modells an die historischen Daten zu vermeiden und das Modell auch optimal im Sinne anderer denkbarer Szenarien zu parametrisieren, werden anhand des Zeitreihenmodells aus Abschnitt 4.2 fiktive Pfade simuliert, für die ebenfalls Backtestingergebnisse beobachtet werden. Aus dem Zeitreihenmodell können jedoch keine Zinsszenarien abgeleitet werden, so dass das Risiko deshalb – analog zu Aktien – auf Grundlage der (simulierten) historischen Renditen ermittelt wird. Beide Methoden – die Konstruktion von Zinsszenarien und die Verwendung beobachteter Renditen – führen aber, wie in Abschnitt 5.1 gezeigt, näherungsweise zum gleichen Ergebnis. Aus diesem Grund unterscheiden sich die Spiegelungsmethoden der Renditenspiegelung (RS) und der Verteilungsspiegelung (VS) im Resultat auch nur unwesentlich. Die Analyse der simulierten Daten mit Spiegelung – und damit deren Ergebnis – bezieht sich auf die Methode der Verteilungsspiegelung.

Das Hinzuziehen der Ergebnisse der Risikomessung simulierter Daten lässt eine bessere Unterscheidung der Modellparametrisierungen nach der Güte ihrer Risikomessung zu. Dabei stimmen die Ergebnisse für die simulierten Daten in Abschnitt 5.6 mit der Erwartungshaltung aus Abschnitt 5.4 überein. Die besten Ergebnisse unter den betrachteten Beobachtungszeiträumen weisen für den VaR auf dem Konfidenzniveau von 99,9 % die gespiegelten Beobachtungsperioden mit 500 oder 1000 Tagen beziehungsweise die ungespiegelte Beobachtungsperiode von 1000 Tagen auf.

Den Ergebnissen dieser Arbeit liegt die Definition des VaR gemäß Gleichung (15) in Abschnitt 5.1 zu Grunde. Würde er stattdessen gemäß Gleichung (25) in Abschnitt 5.7 definiert, so verkürzte sich der erwartete optimale Beobachtungszeitraum um einen Tag, d.h. auf dem Konfidenzniveau von 99,9 % wären dann die gespiegelten Beobachtungsperioden mit 499 oder 999 Tagen beziehungsweise die ungespiegelte Beobachtungsperiode von 999 Tagen als optimal im Sinne einer vorsichtigen Risikomessung zu erwarten.

Die Analyse der bedingten Volatilitätsschätzung in Abschnitt 4.3 zeigt, dass ruhige Marktphasen in der Historie oft mehr als 500 Tage dauern, d.h. Beobachtungsperioden von 500 Tagen enthalten möglicherweise keine Beobachtungen unruhiger Marktverhältnisse in der Historie. Alles in allem ist damit unter den genannten Prämissen ein Beobachtungszeitraum von 1000 Tagen für die Risikoermittlung mittels Historischer Simulation für die Zinsposition eines „gleitenden Zehners“ optimal.

## A Anhang

### A.1 Ergebnisse der Zeitreihenanalyse des GI10

#### A.1.1 Stationarität von Logpreisen und Logrenditen

Zeitreihe	Test	Teststatistik	p-Wert	Hypothese	Testergebnis
Logpreise	ADF	-2,19	49,7 %	$H_0$	Einheitswurzel
Logpreise	KPSS	23,29	< 1 %	$H_1$	Einheitswurzel
Logrenditen	ADF	-15,09	< 1 %	$H_1$	Stationarität
Logrenditen	KPSS	0,09	> 10 %	$H_0$	Stationarität

**Tabelle 5:** Ergebnisse von ADF-Test und KPSS-Test für Logpreise und Logrenditen des GI10

#### A.1.2 ARMA-Modell für die bedingten Erwartungen der Logrenditen

Kennzahl	MA(1) mit $\phi_0$	MA(1) ohne $\phi_0$	AR(1) mit $\phi_0$	AR(1) ohne $\phi_0$	ARMA(1,1) mit $\phi_0$	ARMA(1,1) ohne $\phi_0$
$\hat{\phi}_0$	0,000056		0,000056		0,000056	
$\hat{\sigma}_{\phi_0}$	0,000035		0,000035		0,000035	
$z_{\hat{\phi}_0}$	1,585367		1,584327		1,598999	
$p_{\hat{\phi}_0}$	0,112883		0,113119		0,109821	
$\hat{\phi}_1$			0,049659	0,050562	-0,324485	-0,393239
$\hat{\sigma}_{\phi_1}$			0,016362	0,016361	0,255384	0,244475
$z_{\hat{\phi}_1}$			3,035046	3,090380	-1,270575	-1,608505
$p_{\hat{\phi}_1}$			0,002405	0,001999	0,203880	0,107725
$-\hat{\theta}_1$	0,051390	0,052235			0,375245	0,442771
$\hat{\sigma}_{-\hat{\theta}_1}$	0,016638	0,016624			0,250167	0,236876
$z_{-\hat{\theta}_1}$	3,088653	3,142171			1,499976	1,869214
$p_{-\hat{\theta}_1}$	0,002011	0,001677			0,133621	0,061593

**Tabelle 6:** Vergleich verschiedener ARMA-Modellschätzungen für die erwarteten Logrenditen

Modell	AIC	BIC
MA(1) mit $\phi_0$	-36422,31	-36403,64
MA(1) ohne $\phi_0$	-36421,12	-36408,67
AR(1) mit $\phi_0$	-36422,00	-36403,33
AR(1) ohne $\phi_0$	-36420,81	-36408,36
ARMA(1,1) mit $\phi_0$	-36421,50	-36396,61
ARMA(1,1) ohne $\phi_0$	-36420,13	-36401,46

**Tabelle 7:** Vergleich von AIC und BIC der ARMA-Modellschätzungen für die erwarteten Logrenditen

Zeitabstand $h$	MA(1)	MA(1)	AR(1)	AR(1)	ARMA(1,1)	ARMA(1,1)
	mit $\phi_0$	ohne $\phi_0$	mit $\phi_0$	ohne $\phi_0$	mit $\phi_0$	ohne $\phi_0$
1	0,961	0,920	0,958	0,999	1,000	0,941
2	0,647	0,646	0,554	0,552	0,997	0,964
3	0,693	0,692	0,623	0,621	0,985	0,989
4	0,832	0,831	0,775	0,774	0,994	0,993
5	0,897	0,897	0,857	0,856	0,995	0,992
6	0,950	0,949	0,924	0,924	0,999	0,998
7	0,720	0,720	0,679	0,679	0,862	0,852
8	0,321	0,321	0,294	0,294	0,441	0,434
9	0,109	0,109	0,098	0,098	0,165	0,164
10	0,135	0,135	0,122	0,122	0,202	0,200
11	0,180	0,180	0,164	0,164	0,262	0,260
12	0,164	0,163	0,148	0,148	0,239	0,238
13	0,181	0,181	0,165	0,165	0,262	0,261
14	0,154	0,154	0,140	0,140	0,226	0,225
15	0,136	0,136	0,124	0,123	0,204	0,206
16	0,151	0,151	0,138	0,138	0,220	0,221
17	0,072	0,072	0,064	0,064	0,112	0,113
18	0,073	0,073	0,066	0,066	0,113	0,113
19	0,086	0,086	0,078	0,078	0,132	0,132
20	0,106	0,106	0,096	0,096	0,158	0,159

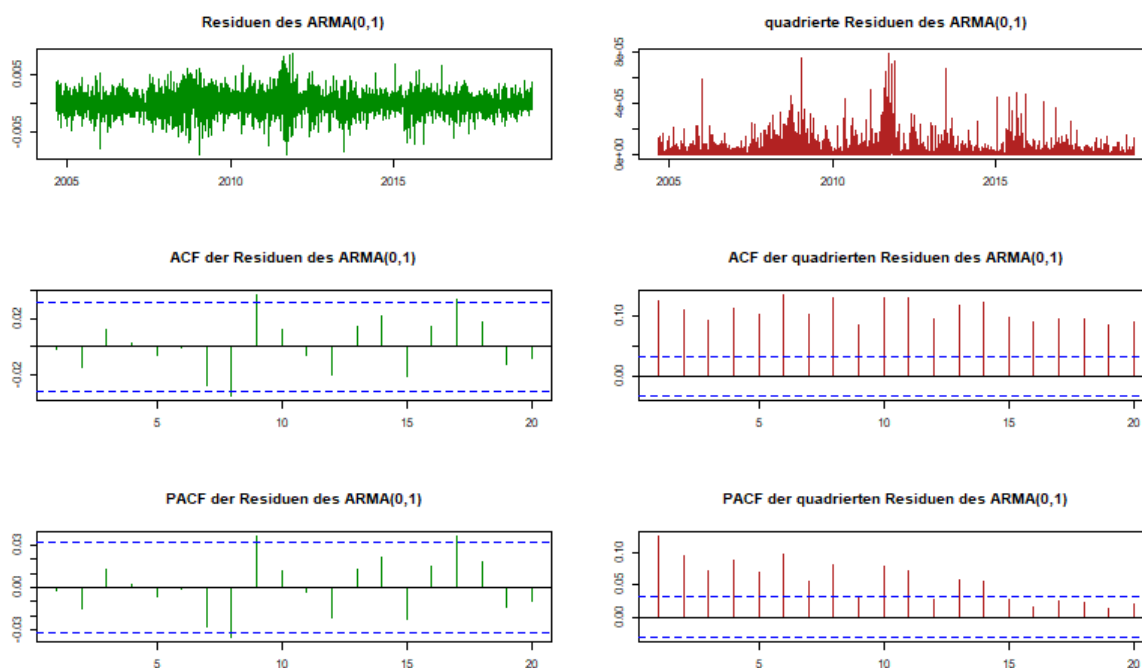
**Tabelle 8:** p-Werte der Box-Ljung-Tests der Residuen der ARMA-Modellschätzungen für die erwarteten Logrenditen

Zeitabstand $h$	Box-Ljung-Test- statistik $Q(h)$	p-Wert
1	57,9	$2,76 \cdot 10^{-14}$
2	102,5	0
3	134,9	0
4	182,1	0
5	221,2	0
6	288,8	0
7	328,4	0
8	390,4	0
9	416,8	0
10	480,9	0

Tabelle 9 – Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle 9 – Fortsetzung von der letzten Seite

Zeitabstand $h$	Box-Ljung-Test-statistik $Q(h)$	p-Wert
11	543,6	0
12	577,2	0
13	629,3	0
14	685,2	0
15	721,2	0
16	751,4	0
17	785,5	0
18	819,2	0
19	846,7	0
20	877,0	0

**Tabelle 9:** Ergebnisse der Box-Ljung-Tests der quadrierten Residuen des MA(1)-Modells ohne Konstante  $\phi_0$ **Abbildung 16:** ACF und PACF der Residuen (grün) sowie der quadrierten Residuen (rot) des MA(1)-Modells ohne Konstante  $\phi_0$  für die Logrenditen des GI10

## A.1.3 ARMA+GARCH-Modell für die Logrenditen

Parameter	Schätzwert	Standardfehler	Teststatistik	p-Wert
$-\theta_1$	0,017500	0,017074	1,02	0,305
$\alpha_0$	$2,04 \cdot 10^{-8}$	$1,46 \cdot 10^{-7}$	0,14	0,889
$\alpha_1$	0,031138	0,001898	16,41	0,000
$\beta_1$	0,962339	0,001655	581,61	0,000

**Tabelle 10:** Schätzung des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne  $\phi_0$  mit normalverteiltem Rauschen mittels `ugarchfit` in R

Parameter	Schätzwert	Standardfehler	Teststatistik	p-Wert
$-\theta_1$	0,037243	0,016538	2,25	0,024
$\alpha_0$	$3,40 \cdot 10^{-8}$	$7,06 \cdot 10^{-9}$	4,82	0,000
$\alpha_1$	0,035824	0,003852	9,30	0,000
$\beta_1$	0,953534	0,004925	193,62	0,000

**Tabelle 11:** Schätzung des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne  $\phi_0$  mit normalverteiltem Rauschen mittels `arch` in Stata

Parameter	Schätzwert	Standardfehler	Teststatistik	p-Wert
$-\theta_1$	0,034379	0,016641	2,07	0,039
$\alpha_0$	$2,48 \cdot 10^{-8}$	$2,12 \cdot 10^{-7}$	0,12	0,907
$\alpha_1$	0,037820	0,004229	8,94	0,000
$\beta_1$	0,954940	0,003679	259,54	0,000
$\nu$	7,734770	0,928719	8,33	0,000

**Tabelle 12:** Schätzung des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne  $\phi_0$  mit Student-t-verteiltem Rauschen mittels `ugarchfit` in R

Parameter	Schätzwert	Standardfehler	Teststatistik	p-Wert
$-\theta_1$	0,042043	0,016369	2,57	0,010
$\alpha_0$	$3,07 \cdot 10^{-8}$	$1,07 \cdot 10^{-8}$	2,87	0,004
$\alpha_1$	0,040438	0,006274	6,45	0,000
$\beta_1$	0,950464	0,007741	122,78	0,000
$\nu$	8,521062	1,099776	-	-

**Tabelle 13:** Schätzung des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne  $\phi_0$  mit Student-t-verteiltem Rauschen mittels `arch` in Stata

Zeitabstand $h$	Standardisierte Residuen		Quadrierte standardisierte Residuen	
	Box-Ljung-Test-statistik $Q(h)$	p-Wert	Box-Ljung-Test-statistik $Q(h)$	p-Wert
1	1,771	0,183	3,842	0,050
2	2,252	0,324	5,123	0,077
3	2,918	0,404	5,962	0,113
4	3,339	0,503	6,014	0,198
5	3,394	0,639	6,068	0,300
6	3,394	0,758	7,021	0,319
7	3,692	0,814	7,326	0,396
8	7,122	0,524	7,336	0,501
9	9,405	0,401	7,453	0,590
10	10,508	0,397	8,661	0,565
11	10,518	0,484	8,711	0,649
12	11,013	0,528	8,793	0,720
13	12,519	0,486	9,898	0,702
14	14,707	0,398	10,034	0,760
15	14,968	0,454	10,317	0,799
16	15,297	0,503	10,905	0,815
17	18,832	0,338	10,905	0,861
18	21,039	0,277	11,575	0,868
19	21,086	0,332	12,985	0,839
20	21,289	0,380	13,982	0,831

**Tabelle 14:** Ergebnisse der Box-Ljung-Tests der standardisierten und quadrierten standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1) ohne  $\phi_0$  mit normalverteiltem Rauschen (Modellschätzung mittels ugarchfit in R)

Zeitabstand $h$	Standardisierte Residuen		Quadrierte standardisierte Residuen	
	Box-Ljung-Test-statistik $Q(h)$	p-Wert	Box-Ljung-Test-statistik $Q(h)$	p-Wert
1	0,143	0,705	2,274	0,132
2	0,582	0,747	2,928	0,231
3	1,232	0,745	4,465	0,215
4	1,705	0,790	4,511	0,341
5	1,791	0,877	4,793	0,442
6	1,791	0,938	5,288	0,507
7	2,044	0,957	5,960	0,544

Tabelle 15 – Fortsetzung auf der nächsten Seite



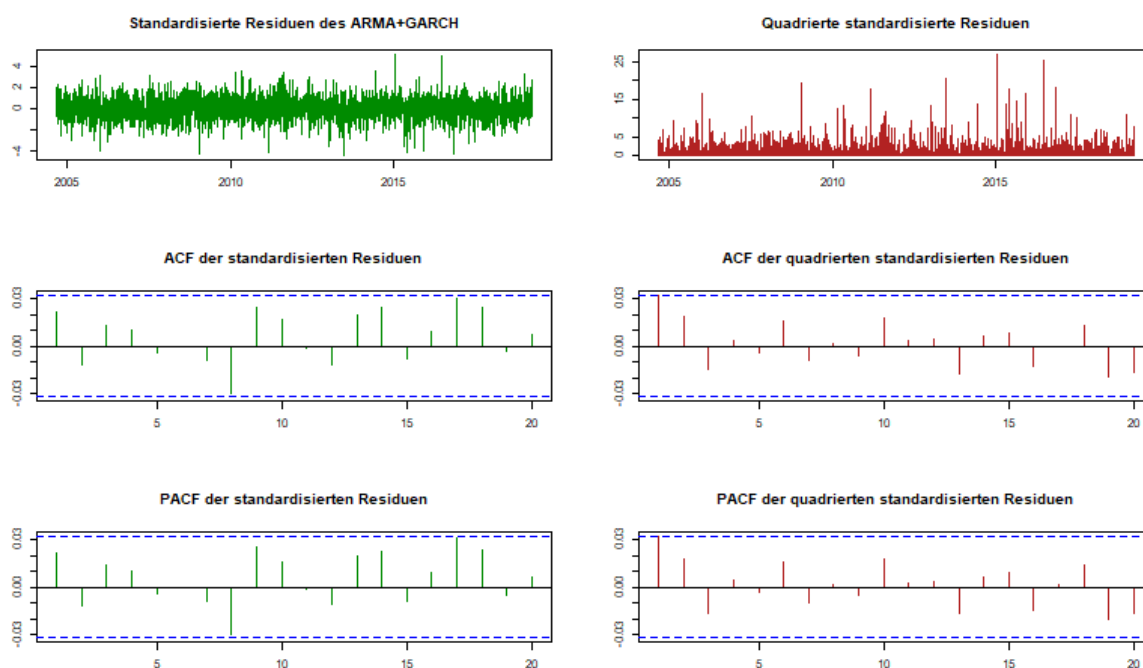
Tabelle 15 – Fortsetzung von der letzten Seite

Zeitabstand $h$	Standardisierte Residuen		Quadrierte standardisierte Residuen	
	Box-Ljung-Test-statistik $Q(h)$	p-Wert	Box-Ljung-Test-statistik $Q(h)$	p-Wert
8	5,379	0,716	5,966	0,651
9	7,663	0,568	6,337	0,706
10	8,743	0,557	7,129	0,713
11	8,755	0,644	7,140	0,788
12	9,189	0,687	7,149	0,848
13	10,605	0,644	8,620	0,801
14	12,682	0,552	8,696	0,850
15	12,929	0,608	8,820	0,887
16	13,211	0,657	9,737	0,880
17	16,577	0,483	9,785	0,912
18	18,651	0,414	10,319	0,921
19	18,688	0,477	11,842	0,892
20	18,941	0,526	13,152	0,871

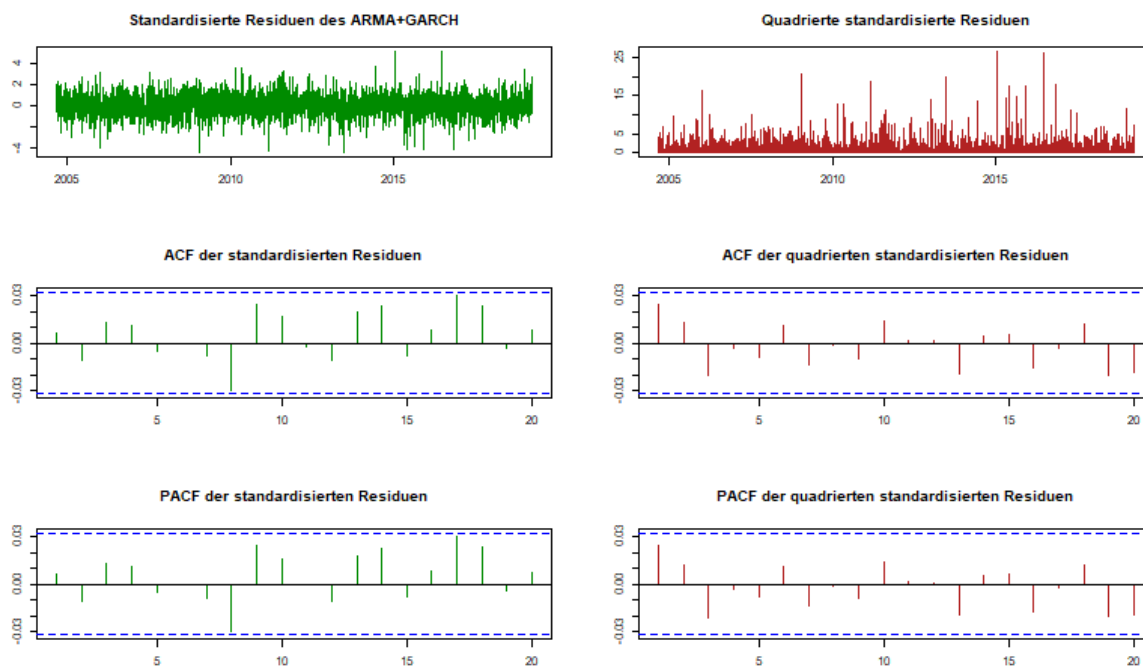
**Tabelle 15:** Ergebnisse der Box-Ljung-Tests der standardisierten und quadrierten standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1) ohne  $\phi_0$  mit Student-t-verteiletem Rauschen (Modellschätzung mittels ugarchfit in R)

Kennzahl	Normalverteiltes Rauschen		Student-t-verteiltes Rauschen	
	$\hat{a}_t$	$\hat{a}_t^2$	$\hat{a}_t$	$\hat{a}_t^2$
Mittelwert	0,028	1,009	0,028	1,000
Standardabweichung	1,004	1,804	1,000	1,796
Schiefe	-0,134	5,115	-0,137	5,219
Wölbung	4,212	45,552	4,244	47,321

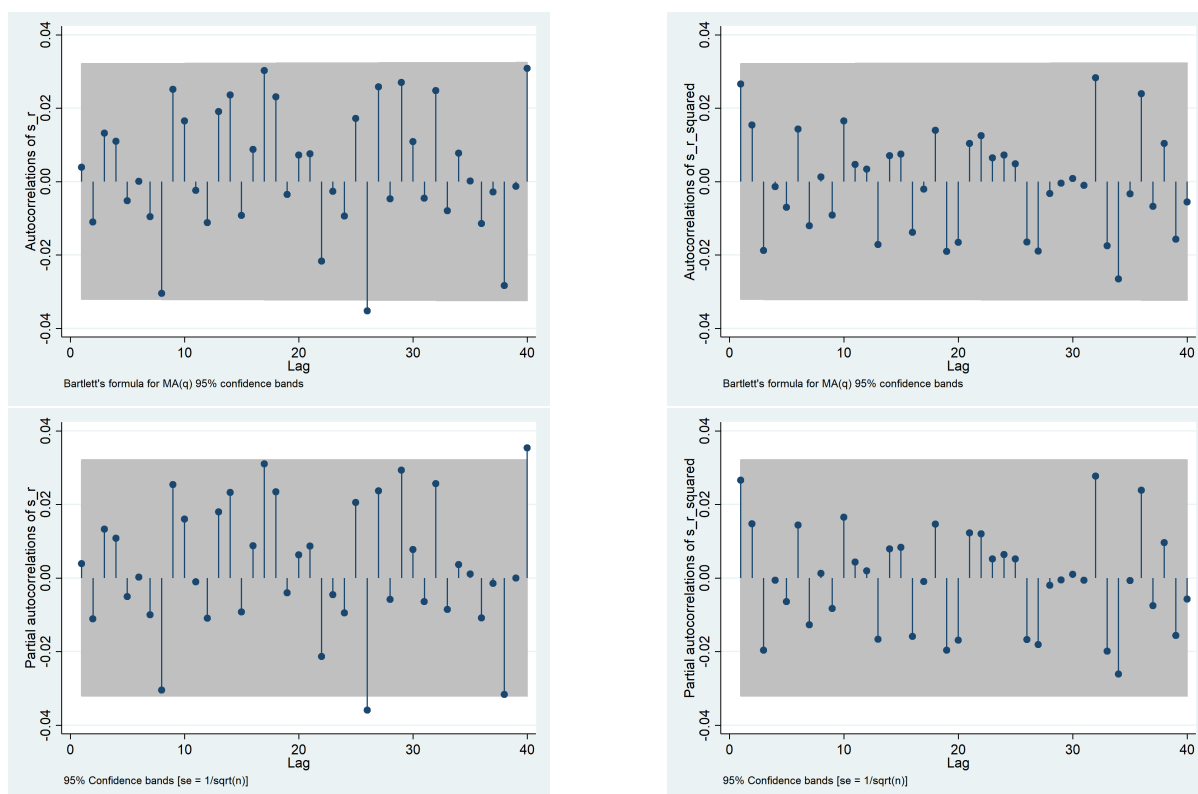
**Tabelle 16:** Erwartungswert, Standardabweichung, Schiefe und Wölbung der standardisierten und quadrierten standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1) ohne  $\phi_0$  (Modellschätzung mittels ugarchfit in R)



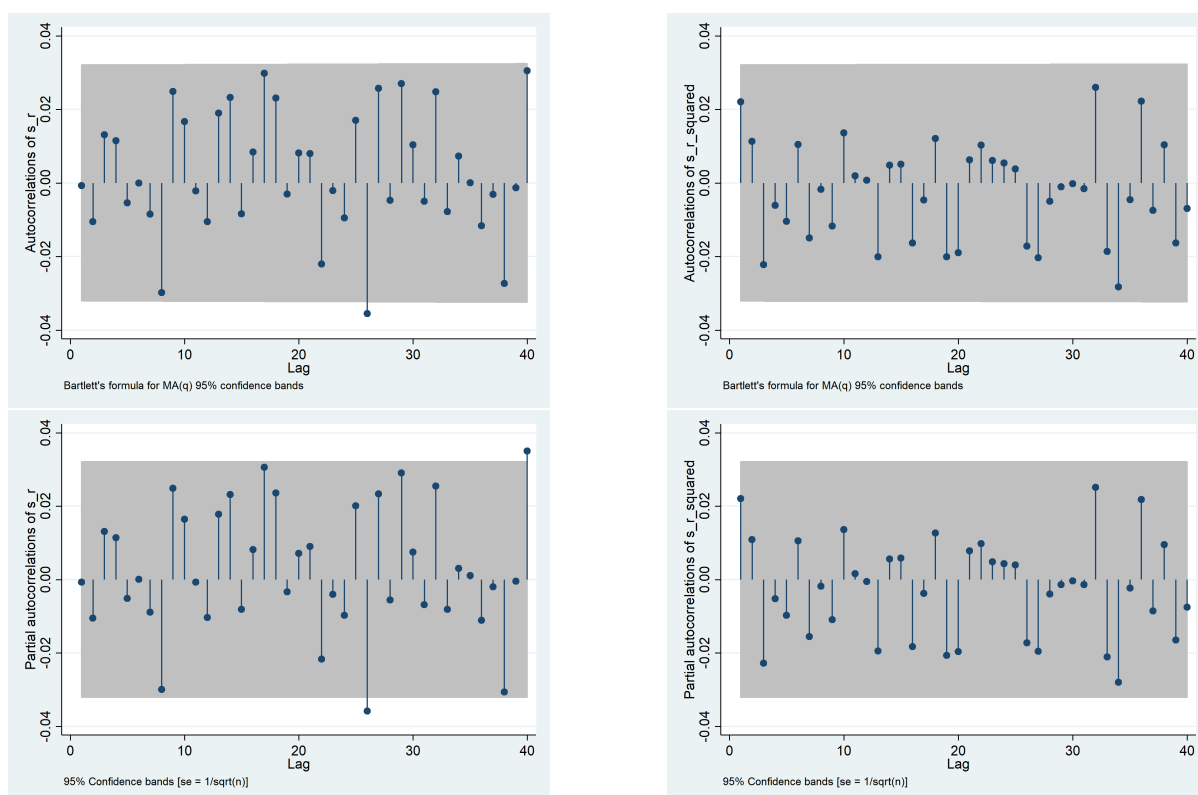
**Abbildung 17:** ACF und PACF der standardisierten und quadrierten standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne  $\phi_0$  mit normalverteiltem Rauschen (Modellschätzung mittels `ugarchfit` in R)



**Abbildung 18:** ACF und PACF der standardisierten und quadrierten standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne  $\phi_0$  mit Student-t-verteiltem Rauschen (Modellschätzung mittels `ugarchfit` in R)



**Abbildung 19:** ACF und PACF der standardisierten und quadrierten standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne  $\phi_0$  mit normalverteiltem Rauschen (mittels arch in Stata)



**Abbildung 20:** ACF und PACF der standardisierten und quadrierten standardisierten Residuen des MA(1)+GARCH(1,1)-Modells ohne  $\phi_0$  mit Student-t-verteiltem Rauschen (mittels arch in Stata)

## A.2 Ergebnisse der Analyse der bedingten Volatilitätsschätzungen

### A.2.1 Ansatz gleitender Durchschnitte

Glättungs- periode $p$	Glättungsra- dius $k = \lfloor p/2 \rfloor$	Vergleichs- radius $l$	Anzahl loka- ler Maxima	Maximaler Zeitabstand zwischen lokalen Maxima
60	30	20	33	268
60	30	30	29	320
100	50	20	23	336
100	50	30	17	683
100	50	50	15	683
200	100	20	16	611
200	100	30	14	682
200	100	60	11	682
200	100	100	9	682
250	125	20	21	646
250	125	30	16	646
250	125	60	11	646
250	125	125	6	724
500	250	20	17	617
500	250	30	13	617
500	250	60	6	951
500	250	130	4	1183
750	375	20	13	901
750	375	30	12	1126
750	375	60	8	1244
750	375	130	6	1244

**Tabelle 17:** Anhand gleitender Durchschnitte ermittelte unruhige Marktphasen und zeitliche Abstände der jeweiligen Höhepunkte

### A.2.2 CPM: serielle Abhängigkeiten der bedingten Volatilitätsschätzungen

Parameter	Schätzwert	Standardfehler	Teststatistik	p-Wert
$\phi_0$	0,0018	0,0001	16,3	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$
$\phi_1$	0,9919	0,0021	475,2	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$

**Tabelle 18:** Ergebnisse der Schätzung des AR(1)-Modells für die bedingte Volatilitätsschätzung  $\hat{\sigma}_t$  mittels Funktion arima in R

Zeitreihe	Test	Wert der Teststatistik	p-Wert	Hypothese	Testergebnis
Bedingte Volatilität	ADF	-4,27	< 1 %	$H_1$	Stationarität
Bedingte Volatilität	KPSS	3,52	< 1 %	$H_1$	Einheitswurzel

**Tabelle 19:** Ergebnisse von ADF-Test und KPSS-Test für die bedingte Volatilitätsschätzung  $\hat{\sigma}_t$

### A.2.3 CPM: Verteilung der Logrenditen

Kennzahl	Ergebnis
Mittelwert	0,00006
Standardabweichung	0,00182
Schiefe	-0,12845
Wölbung	4,68278

**Tabelle 20:** Erwartungswert, Standardabweichung, Schiefe und Wölbung der Logrenditen des GI10

Test	Teststatistik	p-Wert
Jarque-Bera-Test	449,8	< $2,2 \cdot 10^{-16}$
Kolmogorow-Smirnow-Test	0,6	< $2,2 \cdot 10^{-16}$

**Tabelle 21:** Jarque-Bera-Test und Kolmogorow-Smirnow-Anpassungstest auf Normalität der Logrenditen des GI10

### A.2.4 CPM: Ergebnisse der Volatilitätsclusterung

ARLO	startup	Identifizierte Cluster			Maximale Clusterdistanz		
		Anzahl	mittl. Länge	max. Länge	extreme	hohe	erhöhte
500	20	44	85	397	1867	1825	836
500	60	36	103	397	1867	1825	836
500	100	30	124	397	1867	1768	836
500	200	21	177	397	1867	1748	836
500	500	12	310	529	1867	1371	836
2000	20	29	128	579	1867	1742	836
2000	60	26	143	579	1867	1742	836
2000	100	23	162	579	1867	1742	836
2000	200	20	186	579	1867	1748	836
2000	500	12	310	579	1867	1367	836
5000	20	23	162	836	1867	1742	836
5000	60	20	186	836	1867	1742	836
5000	100	18	207	836	1867	1742	836

Tabelle 22 – Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle 22 – Fortsetzung von der letzten Seite

ARLO	startup	Identifizierte Cluster			Maximale Clusterdistanz		
		Anzahl	mittl. Länge	max. Länge	extreme	hohe	erhöhte
5000	200	19	196	836	1867	1748	836
5000	500	10	372	836	1867	1371	836

**Tabelle 22:** Ergebnisse des CPM für die Logrenditen des GI10 mit cpmType „Bartlett“

ARLO	startup	Identifizierte Cluster			Maximale Clusterdistanz		
		Anzahl	mittl. Länge	max. Länge	extreme	hohe	erhöhte
500	20	38	98	579	1836	1836	836
500	60	33	113	579	1836	1836	836
500	100	24	155	579	1836	1836	836
500	200	20	186	579	1867	1742	836
500	500	12	310	579	1867	1367	836
2000	20	22	169	830	1867	1742	830
2000	60	16	233	836	1867	1742	836
2000	100	15	248	836	1867	1742	836
2000	200	15	248	836	1867	1742	836
2000	500	10	372	836	1867	1371	836
5000	20	16	233	836	1867	1742	836
5000	60	14	266	836	1867	1742	836
5000	100	14	266	836	1867	1742	836
5000	200	12	310	836	1867	1480	836
5000	500	10	372	836	1867	1371	836

**Tabelle 23:** Ergebnisse des CPM für die Logrenditen des GI10 mit cpmType „GLR“

ARLO	startup	Identifizierte Cluster			Maximale Clusterdistanz		
		Anzahl	mittl. Länge	max. Länge	extreme	hohe	erhöhte
500	20	28	133	560	1867	1825	740
500	60	26	143	560	1867	1825	740
500	100	25	149	560	1867	1742	740
500	200	19	196	560	1863	1742	740
500	500	11	339	560	1854	1854	807

Tabelle 24 – Fortsetzung auf der nächsten Seite

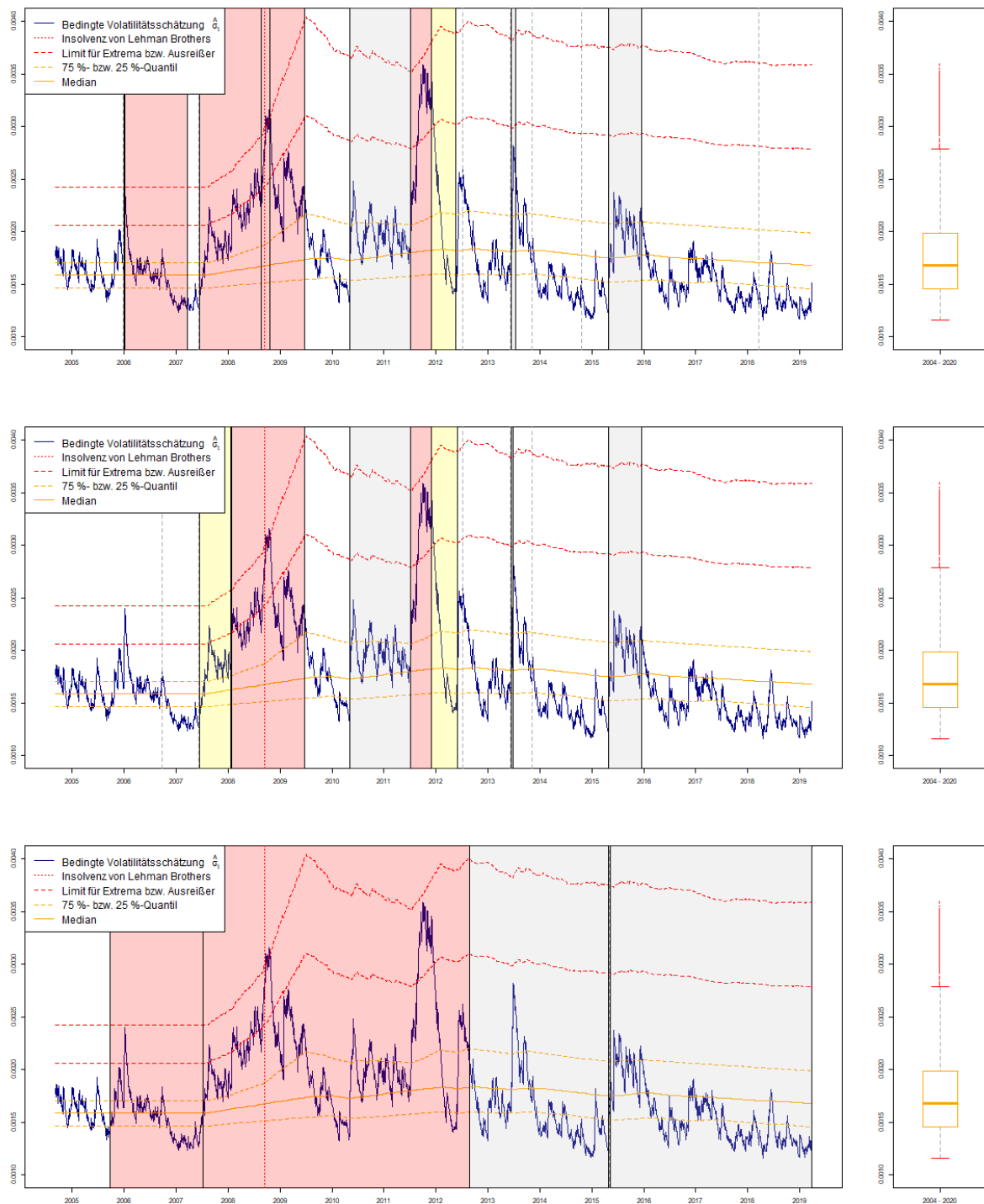
Tabelle 24 – Fortsetzung von der letzten Seite

ARLO	startup	Identifizierte Cluster			Maximale Clusterdistanz		
		Anzahl	mittl. Länge	max. Länge	extreme	hohe	erhöhte
2000	20	18	207	705	1867	1742	773
2000	60	17	219	705	1867	1742	740
2000	100	17	219	705	1867	1742	740
2000	200	17	219	705	1863	1742	773
2000	500	9	414	705	1854	1854	807
5000	20	14	266	723	1867	1742	773
5000	60	14	266	723	1867	1742	773
5000	100	14	266	723	1867	1742	773
5000	200	14	266	722	1863	1742	773
5000	500	8	466	807	1826	1826	807

**Tabelle 24:** Ergebnisse des CPM für die Logrenditen des GI10 mit cpmType „Mood“

ARLO	startup	Identifizierte Cluster			Maximale Clusterdistanz		
		Anzahl	mittl. Länge	max. Länge	extreme	hohe	erhöhte
500	20	18	207	774	1854	1854	461
500	60	18	207	777	1854	1854	458
500	100	18	207	777	1854	1854	458
500	200	13	286	854	1854	1854	217
500	500	9	414	805	1690	1690	217
2000	20	6	621	1317	1680	1680	7
2000	60	6	621	1317	1680	1680	7
2000	100	6	621	1317	1680	1680	7
2000	200	6	621	1317	1680	1680	7
2000	500	6	621	1317	1680	1680	7
5000	20	4	931	1665	1665	1665	1
5000	60	4	931	1665	1665	1665	1
5000	100	4	931	1665	1665	1665	1
5000	200	4	931	1665	1665	1665	1
5000	500	4	931	1665	1665	1665	1

**Tabelle 25:** Ergebnisse des CPM für die Logrenditen des GI10 mit cpmType „Cramer-von-Mises“



**Abbildung 21:** Volatilitätsclusterung mittels CPM mit `cpmTypes` „Bartlett“ (oben), „GLR“ (Mitte) und „Cramer-von-Mises“ (unten), jeweils mit `ARL0=2000`, `startup=200`



### A.3 Ergebnisse der Risikoberechnung und des Backtestings

#### A.3.1 Methode Value at Risk und Expected Shortfall

Level $1 - \alpha$	$\alpha$	$ES_\alpha$	$ES_\alpha - VaR_{0,001}$
99,741 %	0,00259	3,0938	0,0036
99,740 %	0,00260	3,0927	0,0024
99,739 %	0,00261	3,0915	0,0013
99,738 %	0,00262	3,0904	0,0002
99,737 %	0,00263	3,0893	-0,0010
99,736 %	0,00264	3,0881	-0,0021
99,735 %	0,00265	3,0870	-0,0032
99,734 %	0,00266	3,0859	-0,0044

**Tabelle 26:** Äquivalentes Level des ES zum VaR einer standardnormalverteilten Zufallsvariable zum Konfidenzniveau 99,9 %

Level $1 - \alpha$	$\alpha$	$ES_\alpha$	$ES_\alpha - VaR_{0,001}$
99,717 %	0,00283	4,5850	0,0092
99,716 %	0,00284	4,5823	0,0064
99,715 %	0,00285	4,5795	0,0037
99,714 %	0,00286	4,5767	0,0009
99,713 %	0,00287	4,5740	-0,0019
99,712 %	0,00288	4,5712	-0,0046
99,711 %	0,00289	4,5685	-0,0073
99,710 %	0,00290	4,5658	-0,0101

**Tabelle 27:** Äquivalentes Level des ES zum VaR einer Student-t-verteilten Zufallsvariable mit  $\nu = 7,7$  Freiheitsgraden zum Konfidenzniveau 99,9 %

Level $1 - \alpha$	$\alpha$	$ES_\alpha$	$ES_\alpha - VaR_{0,01}$
97,460 %	0,02540	2,3318	0,0055
97,450 %	0,02550	2,3303	0,0040
97,440 %	0,02560	2,3288	0,0025
97,430 %	0,02570	2,3273	0,0010
97,420 %	0,02580	2,3259	-0,0005

Tabelle 28 – Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle 28 – Fortsetzung von der letzten Seite

Level $1 - \alpha$	$\alpha$	$ES_\alpha$	$ES_\alpha - VaR_{0,01}$
97,410 %	0,02590	2,3244	-0,0019
97,400 %	0,02600	2,3229	-0,0034
97,390 %	0,02610	2,3215	-0,0049

**Tabelle 28:** Äquivalentes Level des ES zum VaR einer standardnormalverteilten Zufallsvariable zum Konfidenzniveau 99,0 %

Level $1 - \alpha$	$\alpha$	$ES_\alpha$	$ES_\alpha - VaR_{0,01}$
97,230 %	0,02770	2,9315	0,0079
97,220 %	0,02780	2,9291	0,0055
97,210 %	0,02790	2,9266	0,0031
97,200 %	0,02800	2,9242	0,0006
97,190 %	0,02810	2,9218	-0,0018
97,180 %	0,02820	2,9194	-0,0042
97,170 %	0,02830	2,9170	-0,0066
97,160 %	0,02840	2,9146	-0,0089

**Tabelle 29:** Äquivalentes Level des ES zum VaR einer Student-t-verteilten Zufallsvariable mit  $\nu = 7,7$  Freiheitsgraden zum Konfidenzniveau 99,0 %

$\alpha$	Spiegelung	rollierend				
		250	500	750	1000	1250
0,1 %	OS	0,75	0,50	0,25	0,00	0,75
0,1 %	RS, VS	0,50	0,00	0,50	0,00	0,50
1 %	OS	0,50	0,00	0,50	0,00	0,50
1 %	RS, VS	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2,5 %	OS	0,75	0,50	0,25	0,00	0,75
2,5 %	RS, VS	0,50	0,00	0,50	0,00	0,50

**Tabelle 30:** Abstand zur erwarteten optimalen Parametrisierung  $(\lceil \alpha \cdot (1 + I_S) \cdot n \rceil - \alpha \cdot (1 + I_S) \cdot n) \in [0,1[$  für rollierende Beobachtungszeiträume  $n \in \mathbb{N}$

## A.3.2 Value at Risk historischer Daten

Historie	Aus- reißer	Ampel- status	p-Wert Binomialtest		Spanne der Risikowerte			RRK
			einseitig	zweiseitig	Min	Median	Max	
250 OS	9	gelb	0,001	0,001	0,0030	0,0060	0,0091	-0,348
250 RS	6	gelb	0,040	0,040	0,0037	0,0066	0,0091	-0,530
250 VS	6	gelb	0,040	0,040	0,0037	0,0067	0,0091	-0,537
500 OS	3	grün	0,450	0,742	0,0051	0,0081	0,0091	-0,326
500 RS	3	grün	0,450	0,742	0,0051	0,0081	0,0091	-0,299
500 VS	3	grün	0,450	0,742	0,0051	0,0081	0,0091	-0,294
750 OS	1	grün	0,916	0,529	0,0059	0,0086	0,0092	-0,189
750 RS	2	grün	0,708	1,000	0,0059	0,0071	0,0090	-0,179
750 VS	2	grün	0,708	1,000	0,0059	0,0071	0,0091	-0,182
1000 OS	1	grün	0,916	0,529	0,0068	0,0087	0,0094	-0,178
1000 RS	2	grün	0,708	1,000	0,0067	0,0083	0,0092	-0,150
1000 VS	2	grün	0,708	1,000	0,0067	0,0083	0,0093	-0,153
1250 OS	2	grün	0,708	1,000	0,0068	0,0083	0,0090	0,097
1250 RS	2	grün	0,708	1,000	0,0064	0,0085	0,0090	-0,149
1250 VS	2	grün	0,708	1,000	0,0064	0,0085	0,0091	-0,150
3724 OS	2	grün	0,708	1,000	0,0072	0,0083	0,0090	-0,067
3724 RS	2	grün	0,708	1,000	0,0064	0,0083	0,0087	0,079
3724 VS	2	grün	0,708	1,000	0,0064	0,0083	0,0088	0,087

**Tabelle 31:** Ergebnisse des historischen VaR-Backtesting zum Konfidenzniveau von 99,9 % bei 2474 Beobachtungen und damit 2,474 erwarteten Ausreißern

Historie	Aus- reißer	Ampel- status	p-Wert Binomialtest		Spanne der Risikowerte			RRK
			einseitig	zweiseitig	Min	Median	Max	
250 OS	29	grün	0,219	0,363	0,0027	0,0045	0,0069	-0,438
250 RS	24	grün	0,587	1,000	0,0030	0,0047	0,0073	0,210
250 VS	24	grün	0,587	1,000	0,0030	0,0047	0,0074	0,164
500 OS	16	grün	0,976	0,085	0,0036	0,0053	0,0062	0,206
500 RS	20	grün	0,857	0,417	0,0033	0,0047	0,0062	-0,170
500 VS	20	grün	0,857	0,417	0,0033	0,0047	0,0062	-0,174
750 OS	15	grün	0,986	0,054	0,0036	0,0053	0,0059	-0,181
750 RS	16	grün	0,976	0,085	0,0034	0,0053	0,0060	-0,067
750 VS	16	grün	0,976	0,085	0,0034	0,0053	0,0060	-0,066
1000 OS	16	grün	0,976	0,085	0,0042	0,0052	0,0060	-0,098

Tabelle 32 – Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle 32 – Fortsetzung von der letzten Seite

Historie	Aus- reißer	Ampel- status	p-Wert einseitig	Binomialtest zweiseitig	Spanne der Risikowerte			RRK
					Min	Median	Max	
1000 RS	16	grün	0,976	0,085	0,0038	0,0052	0,0060	-0,062
1000 VS	16	grün	0,976	0,085	0,0038	0,0052	0,0060	-0,065
1250 OS	19	grün	0,901	0,311	0,0040	0,0054	0,0061	-0,071
1250 RS	19	grün	0,901	0,311	0,0036	0,0054	0,0058	-0,054
1250 VS	18	grün	0,934	0,189	0,0036	0,0054	0,0059	-0,061
3724 OS	21	grün	0,802	0,543	0,0047	0,0052	0,0054	-0,037
3724 RS	20	grün	0,857	0,417	0,0048	0,0053	0,0054	-0,015
3724 VS	19	grün	0,901	0,311	0,0048	0,0053	0,0055	-0,016

**Tabelle 32:** Ergebnisse des historischen VaR-Backtesting zum Konfidenzniveau von 99,0 % bei 2474 Beobachtungen und damit 24,74 erwarteten Ausreißern

Historie	Aus- reißer	Ampel- status	p-Wert einseitig	Binomialtest zweiseitig	Spanne der Risikowerte			RRK
					Min	Median	Max	
250 OS	65	grün	0,360	0,652	0,0022	0,0035	0,0056	-0,166
250 RS	61	grün	0,561	1,000	0,0024	0,0035	0,0056	-0,089
250 VS	60	grün	0,612	0,897	0,0024	0,0035	0,0057	-0,087
500 OS	50	grün	0,948	0,138	0,0027	0,0036	0,0048	-0,114
500 RS	52	grün	0,912	0,221	0,0026	0,0035	0,0052	-0,103
500 VS	51	grün	0,932	0,176	0,0026	0,0035	0,0052	-0,105
750 OS	47	grün	0,980	0,061	0,0030	0,0042	0,0048	-0,105
750 RS	49	grün	0,961	0,107	0,0028	0,0043	0,0048	-0,049
750 VS	48	grün	0,972	0,082	0,0028	0,0043	0,0048	-0,045
1000 OS	44	grün	0,993	0,020	0,0032	0,0042	0,0047	-0,076
1000 RS	42	grün	0,997	0,010	0,0030	0,0043	0,0049	-0,046
1000 VS	42	grün	0,997	0,010	0,0030	0,0043	0,0050	-0,049
1250 OS	42	grün	0,997	0,010	0,0031	0,0042	0,0048	-0,058
1250 RS	41	grün	0,998	0,005	0,0030	0,0043	0,0048	-0,039
1250 VS	41	grün	0,998	0,005	0,0030	0,0043	0,0048	-0,035
3724 OS	39	grün	0,999	0,002	0,0039	0,0043	0,0044	-0,026
3724 RS	40	grün	0,999	0,004	0,0039	0,0042	0,0044	-0,011
3724 VS	40	grün	0,999	0,004	0,0039	0,0043	0,0044	0,016

**Tabelle 33:** Ergebnisse des historischen VaR-Backtesting zum Konfidenzniveau von 97,5 % bei 2474 Beobachtungen und damit 61,85 erwarteten Ausreißern

## A.3.3 Expected Shortfall historischer Daten

Historie	Teststatistiken		p-Werte		Spanne der Risikowerte			RRK
	$Z_1$	$Z_2$	$p_{Z_1}$	$p_{Z_2}$	Minimum	Median	Maximum	
250 OS	-0,030	-0,208	0,099	0,014	0,0029	0,0055	0,0081	-0,378
250 RS	-0,038	-0,007	0,120	0,125	0,0035	0,0056	0,0087	-0,220
250 VS	-0,034	-0,003	0,156	0,131	0,0036	0,0056	0,0088	-0,219
500 OS	-0,023	0,338	0,243	0,769	0,0042	0,0068	0,0080	-0,182
500 RS	-0,000	0,192	0,484	0,673	0,0038	0,0062	0,0080	-0,116
500 VS	0,005	0,195	0,540	0,676	0,0039	0,0062	0,0080	-0,115
750 OS	-0,026	0,378	0,223	0,950	0,0043	0,0065	0,0074	-0,129
750 RS	-0,044	0,325	0,110	0,911	0,0041	0,0061	0,0074	-0,084
750 VS	-0,039	0,328	0,136	0,913	0,0041	0,0062	0,0074	-0,084
1000 OS	0,019	0,365	0,714	0,919	0,0058	0,0068	0,0073	-0,082
1000 RS	-0,009	0,348	0,398	0,940	0,0052	0,0061	0,0072	-0,056
1000 VS	-0,004	0,351	0,455	0,942	0,0052	0,0061	0,0073	-0,056
1250 OS	0,025	0,251	0,761	0,862	0,0055	0,0067	0,0072	-0,071
1250 RS	0,008	0,239	0,581	0,845	0,0051	0,0065	0,0071	-0,044
1250 VS	0,005	0,276	0,540	0,889	0,0051	0,0065	0,0072	-0,044
3724 OS	-0,002	0,149	0,449	0,729	0,0058	0,0065	0,0068	0,029
3724 RS	-0,031	0,167	0,174	0,777	0,0056	0,0063	0,0066	0,028
3724 VS	-0,036	0,205	0,141	0,831	0,0056	0,0064	0,0066	0,028

Tabelle 34: Ergebnisse des historischen ES-Backtestings zum Level von 99,0 % bei 2474 Beobachtungen

Historie	Teststatistiken		p-Werte		Spanne der Risikowerte			RRK
	$Z_1$	$Z_2$	$p_{Z_1}$	$p_{Z_2}$	Minimum	Median	Maximum	
250 OS	-0,029	-0,082	0,128	0,162	0,0026	0,0047	0,0067	-0,210
250 RS	-0,039	-0,025	0,086	0,299	0,0031	0,0047	0,0071	-0,107
250 VS	-0,040	-0,009	0,081	0,342	0,0031	0,0047	0,0072	-0,106
500 OS	-0,002	0,190	0,449	0,886	0,0035	0,0052	0,0064	-0,121
500 RS	0,001	0,160	0,493	0,820	0,0033	0,0048	0,0064	-0,073
500 VS	0,000	0,176	0,487	0,852	0,0033	0,0048	0,0065	-0,072
750 OS	0,023	0,258	0,780	0,963	0,0036	0,0054	0,0061	-0,082
750 RS	0,006	0,212	0,571	0,941	0,0035	0,0053	0,0060	-0,047
750 VS	0,006	0,228	0,571	0,955	0,0035	0,0053	0,0061	-0,046

Tabelle 35 – Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle 35 – Fortsetzung von der letzten Seite

Historie	Teststatistiken		p-Werte		Spanne der Risikowerte			RRK
	$Z_1$	$Z_2$	$p_{Z_1}$	$p_{Z_2}$	Minimum	Median	Maximum	
1000 OS	0,037	0,315	0,897	0,987	0,0044	0,0053	0,0060	-0,060
1000 RS	0,007	0,325	0,586	0,994	0,0041	0,0052	0,0061	-0,033
1000 VS	0,011	0,328	0,639	0,994	0,0041	0,0052	0,0061	-0,033
1250 OS	0,010	0,328	0,631	0,995	0,0042	0,0055	0,0059	-0,049
1250 RS	-0,000	0,337	0,487	0,996	0,0040	0,0055	0,0059	-0,027
1250 VS	0,004	0,340	0,542	0,997	0,0040	0,0055	0,0059	-0,027
3724 OS	-0,051	0,337	0,035	0,997	0,0049	0,0054	0,0056	0,017
3724 RS	-0,045	0,324	0,043	0,996	0,0048	0,0054	0,0055	0,021
3724 VS	-0,041	0,327	0,059	0,996	0,0048	0,0054	0,0055	0,021

**Tabelle 35:** Ergebnisse des historischen ES-Backtestings zum Level von 97,5 % bei 2474 Beobachtungen

## A.3.4 Value at Risk simulierter Daten

Historie	Verteilung des			ØAnteil p-Werte der		ØMittle- rer VaR	ØAus- reißer
	Basler Grün	Ampelstatus Gelb	Rot	Binomialtests einseitig	$\geq 5\%$ zweiseitig		
250 OS	0,000	0,184	0,815	0,004	0,004	0,0057	13,0
250 VS	0,331	0,611	0,058	0,504	0,504	0,0065	6,7
500 OS	0,283	0,658	0,058	0,466	0,466	0,0068	6,9
500 VS	0,869	0,130	0,000	0,943	0,943	0,0076	3,5
750 OS	0,706	0,289	0,005	0,839	0,839	0,0076	4,7
750 VS	0,692	0,299	0,009	0,819	0,819	0,0072	4,6
1000 OS	0,877	0,122	0,001	0,944	0,944	0,0081	3,5
1000 VS	0,859	0,139	0,002	0,931	0,931	0,0077	3,5
1250 OS	0,553	0,419	0,027	0,703	0,703	0,0073	5,4
1250 VS	0,757	0,234	0,009	0,860	0,860	0,0076	4,1
3999 OS	0,728	0,241	0,031	0,812	0,812	0,0080	4,0
3999 VS	0,773	0,202	0,024	0,848	0,848	0,0080	3,6

**Tabelle 36:** Ergebnisse des VaR-Backtestings zum Konfidenzniveau von 99,9 % bei 10000 simulierten Pfaden à 2750 Beobachtungen

Historie	Verteilung des Basler Ampelstatus			Ø Anteil p-Werte der Binomialtests $\geq 5\%$		Ø Mittlerer VaR	Ø Ausreißer
	Grün	Gelb	Rot	einseitig	zweiseitig		
250 OS	0,395	0,597	0,008	0,482	0,658	0,0043	36,9
250 VS	0,812	0,186	0,001	0,860	0,919	0,0044	30,9
500 OS	0,795	0,203	0,002	0,846	0,910	0,0046	31,4
500 VS	0,766	0,229	0,006	0,810	0,876	0,0045	31,3
750 OS	0,671	0,314	0,015	0,723	0,815	0,0046	33,1
750 VS	0,760	0,230	0,010	0,798	0,852	0,0046	31,0
1000 OS	0,769	0,220	0,011	0,811	0,859	0,0047	30,8
1000 VS	0,756	0,230	0,014	0,794	0,835	0,0047	30,7
1250 OS	0,712	0,266	0,023	0,754	0,800	0,0047	31,7
1250 VS	0,754	0,225	0,021	0,789	0,804	0,0047	30,4
3999 OS	0,677	0,229	0,094	0,701	0,571	0,0048	30,2
3999 VS	0,692	0,222	0,086	0,717	0,580	0,0048	29,7

**Tabelle 37:** Ergebnisse des VaR-Backtestings zum Konfidenzniveau von 99,0 % bei 10000 simulierten Pfaden à 2750 Beobachtungen

k	Binomialtest für $\alpha = 0,001$				Binomialtest für $\alpha = 0,01$			
	einseitig		zweiseitig		einseitig		zweiseitig	
	p-Wert	< 0,05	p-Wert	< 0,05	p-Wert	< 0,05	p-Wert	< 0,05
0	1,0000	nein	0,1246	nein	1,0000	nein	0,0000	ja
1	0,9362	nein	0,5365	nein	1,0000	nein	0,0000	ja
2	0,7604	nein	1,0000	nein	1,0000	nein	0,0000	ja
3	0,5186	nein	0,7582	nein	1,0000	nein	0,0000	ja
4	0,2969	nein	0,3608	nein	1,0000	nein	0,0000	ja
5	0,1445	nein	0,2084	nein	1,0000	nein	0,0000	ja
6	0,0607	nein	0,0607	nein	1,0000	nein	0,0000	ja
7	0,0224	ja	0,0224	ja	1,0000	nein	0,0000	ja
8	0,0073	ja	0,0073	ja	1,0000	nein	0,0000	ja
9	0,0021	ja	0,0021	ja	1,0000	nein	0,0001	ja
10	0,0006	ja	0,0006	ja	1,0000	nein	0,0002	ja
11	0,0001	ja	0,0001	ja	0,9999	nein	0,0007	ja
12	0,0000	ja	0,0000	ja	0,9997	nein	0,0015	ja
13	0,0000	ja	0,0000	ja	0,9993	nein	0,0038	ja
14	0,0000	ja	0,0000	ja	0,9984	nein	0,0070	ja
15	0,0000	ja	0,0000	ja	0,9966	nein	0,0125	ja

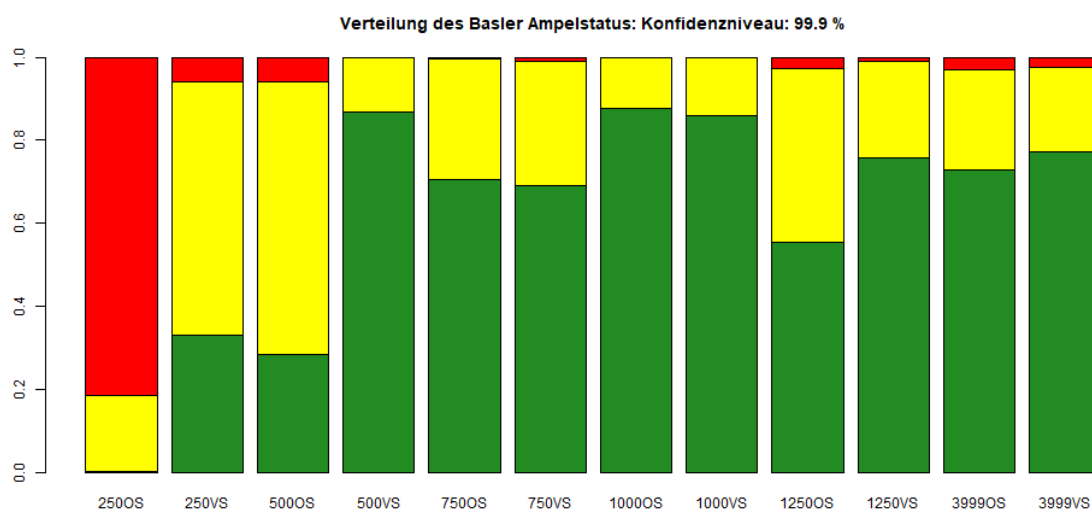
Tabelle 38 – Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle 38 – Fortsetzung von der letzten Seite

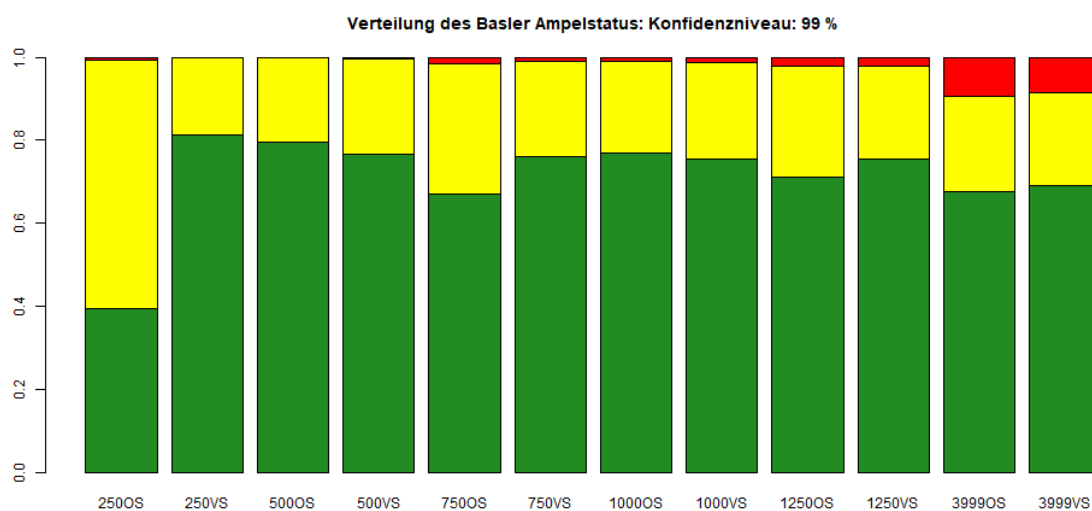
k	Binomialtest für $\alpha = 0,001$				Binomialtest für $\alpha = 0,01$			
	einseitig		zweiseitig		einseitig		zweiseitig	
	p-Wert	< 0,05	p-Wert	< 0,05	p-Wert	< 0,05	p-Wert	< 0,05
16	0,0000	ja	0,0000	ja	0,9933	nein	0,0268	ja
17	0,0000	ja	0,0000	ja	0,9876	nein	0,0435	ja
18	0,0000	ja	0,0000	ja	0,9783	nein	0,0684	nein
19	0,0000	ja	0,0000	ja	0,9641	nein	0,1237	nein
20	0,0000	ja	0,0000	ja	0,9434	nein	0,1784	nein
21	0,0000	ja	0,0000	ja	0,9149	nein	0,2491	nein
22	0,0000	ja	0,0000	ja	0,8776	nein	0,3373	nein
23	0,0000	ja	0,0000	ja	0,8307	nein	0,4432	nein
24	0,0000	ja	0,0000	ja	0,7746	nein	0,5655	nein
25	0,0000	ja	0,0000	ja	0,7101	nein	0,7018	nein
26	0,0000	ja	0,0000	ja	0,6392	nein	0,8482	nein
27	0,0000	ja	0,0000	ja	0,5640	nein	1,0000	nein
28	0,0000	ja	0,0000	ja	0,4875	nein	0,9234	nein
29	0,0000	ja	0,0000	ja	0,4122	nein	0,7731	nein
30	0,0000	ja	0,0000	ja	0,3409	nein	0,6308	nein
31	0,0000	ja	0,0000	ja	0,2756	nein	0,5011	nein
32	0,0000	ja	0,0000	ja	0,2177	nein	0,3870	nein
33	0,0000	ja	0,0000	ja	0,1680	nein	0,2905	nein
34	0,0000	ja	0,0000	ja	0,1267	nein	0,2117	nein
35	0,0000	ja	0,0000	ja	0,0933	nein	0,1499	nein
36	0,0000	ja	0,0000	ja	0,0671	nein	0,1031	nein
37	0,0000	ja	0,0000	ja	0,0472	ja	0,0831	nein
38	0,0000	ja	0,0000	ja	0,0325	ja	0,0542	nein
39	0,0000	ja	0,0000	ja	0,0218	ja	0,0342	ja
40	0,0000	ja	0,0000	ja	0,0143	ja	0,0211	ja

**Tabelle 38:** Vergleich der p-Werte der ein- und zweiseitigen Binomialtests simulierter Pfade sowie deren Vergleich zum Signifikanzniveau von 5 %

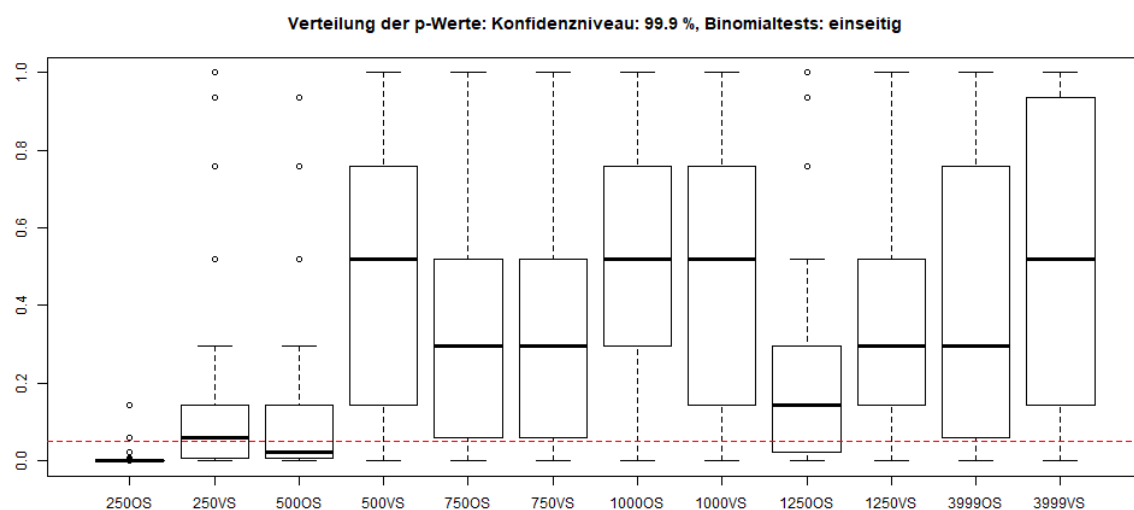




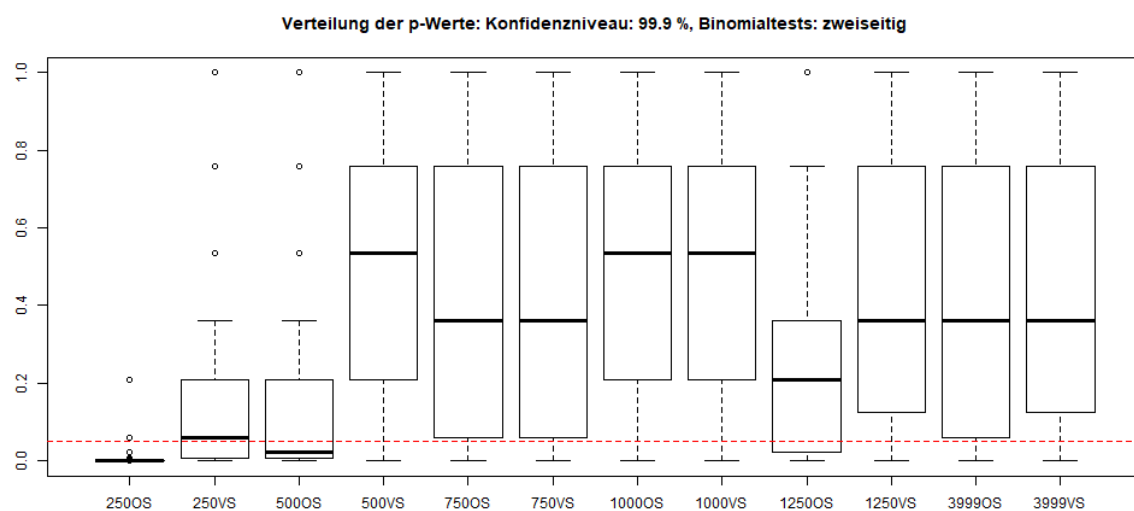
**Abbildung 22:** Verteilung des Basler Ampelstatus für 10000 simulierte Pfade à 2750 Beobachtungen zum Konfidenzniveau 99,9 %



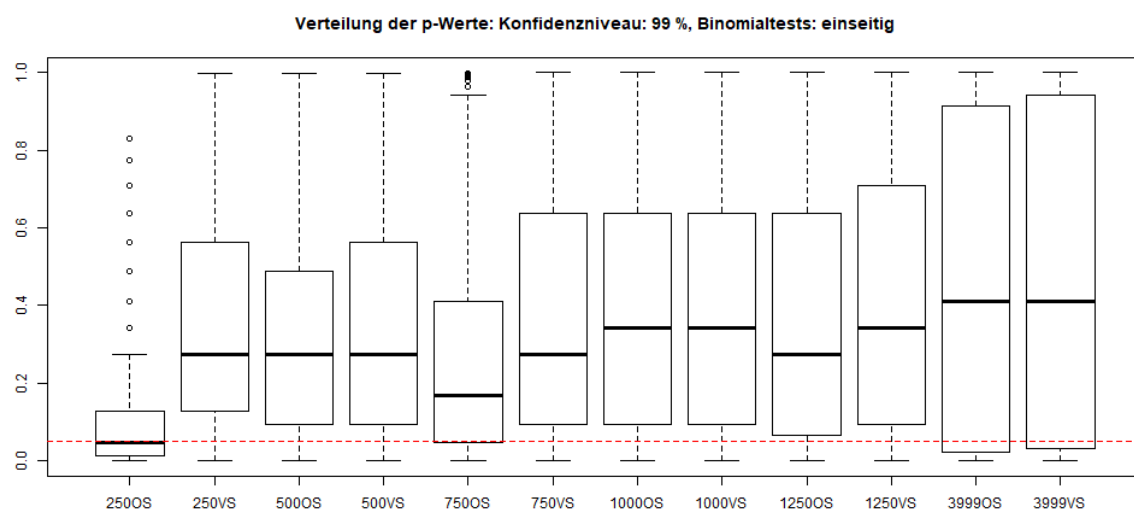
**Abbildung 23:** Verteilung des Basler Ampelstatus für 10000 simulierte Pfade à 2750 Beobachtungen zum Konfidenzniveau 99,0 %



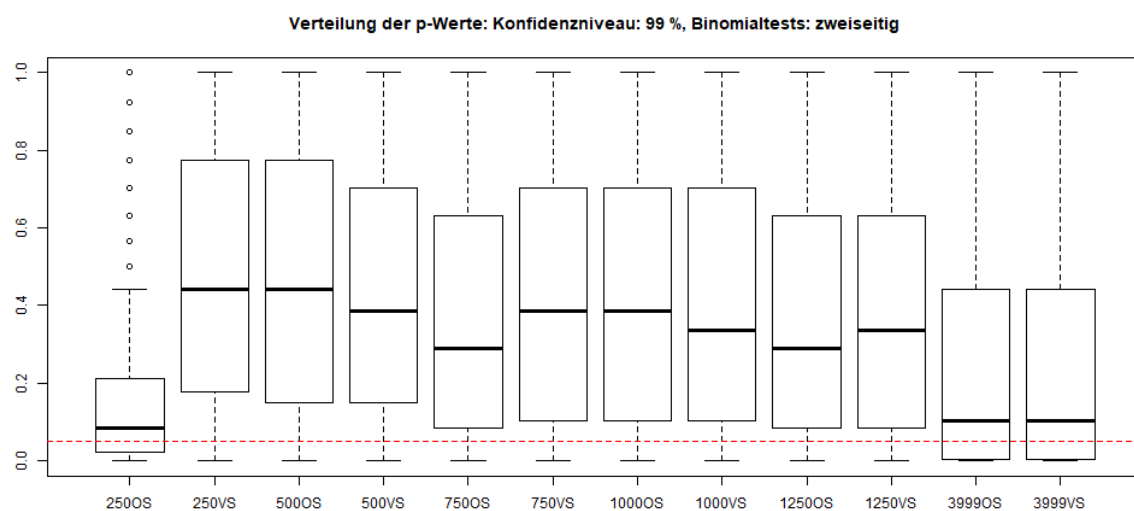
**Abbildung 24:** Verteilung der p-Werte einseitiger Binomialtests zum VaR-Backtesting für 10000 simulierte Pfade à 2750 Beobachtungen zum Konfidenzniveau 99,9 %



**Abbildung 25:** Verteilung der p-Werte zweiseitiger Binomialtests zum VaR-Backtesting für 10000 simulierte Pfade à 2750 Beobachtungen zum Konfidenzniveau 99,9 %



**Abbildung 26:** Verteilung der p-Werte einseitiger Binomialtests zum VaR-Backtesting für 10000 simulierte Pfade à 2750 Beobachtungen zum Konfidenzniveau 99,0 %



**Abbildung 27:** Verteilung der p-Werte zweiseitiger Binomialtests zum VaR-Backtesting für 10000 simulierte Pfade à 2750 Beobachtungen zum Konfidenzniveau 99,0 %

## B Literaturverzeichnis

- [Acerbi u. Szekely 2014] ACERBI, Carlo ; SZEKELY, Balazs: *Backtesting Expected Shortfall*. <https://www.msci.com/documents/10199/22aa9922-f874-4060-b77a-0f0e267a489b>, Oktober 2014
- [BaFin 2018a] BAFIN: *Aufsichtliche Beurteilung bankinterner Risikotragfähigkeitskonzepte und deren prozessualer Einbindung in die Gesamtbanksteuerung („ICAAP“) – Neuausrichtung*. [https://www.bafin.de/SharedDocs/Downloads/DE/Anlage/dl\\_180524\\_rtf-leitfaden\\_veroeffentlichung.pdf?\\_\\_blob=publicationFile&v=3](https://www.bafin.de/SharedDocs/Downloads/DE/Anlage/dl_180524_rtf-leitfaden_veroeffentlichung.pdf?__blob=publicationFile&v=3), Mai 2018
- [BaFin 2018b] BAFIN: *Zinsänderungsrisiken im Anlagebuch*. [https://www.bafin.de/SharedDocs/Veroeffentlichungen/DE/Rundschreiben/2018/rs\\_1809\\_zinsaenderungsrisiken\\_anlagebuch.html](https://www.bafin.de/SharedDocs/Veroeffentlichungen/DE/Rundschreiben/2018/rs_1809_zinsaenderungsrisiken_anlagebuch.html), Juni 2018
- [BCBS 1996] BCBS: *Supervisory Framework for the use of „Backtesting“ in conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements*. <https://www.bis.org/publ/bcbssc223.pdf>, Januar 1996
- [BCBS 2006] BCBS: *Internationale Konvergenz der Eigenkapitalmessung und Eigenkapitalanforderungen*. <https://www.bis.org/publ/bcbs128ger.pdf>, Juni 2006
- [Boudoukh u. a. 1997] BOUDOUKH, Jacob ; RICHARDSON, Matthew ; WHITELAW, Robert F.: *The Best of Both Worlds: A Hybrid Approach to Calculating Value at Risk*. [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=51420](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=51420), November 1997
- [Bricke 2016] BRICKE, Thomas: *Moderne historische Simulation: abklingende Eintrittswahrscheinlichkeiten*. In: *BankPraktiker* (2016), Nr. 6/2016, S. 211–217
- [Deutsch 2008] DEUTSCH, Hans-Peter: *Derivate und Interne Modelle*. 4. Auflage. Schäffer-Poeschel-Verlag Stuttgart, 2008
- [Deutsche Bundesbank 1998] DEUTSCHE BUNDESBANK: *Bankinterne Risikosteuerungsmodelle und deren bankaufsichtliche Eignung*. <https://www.bundesbank.de/resource/blob/691598/ec28894ae8bcc612b28aa70677a78d3f/mL/1998-10-risikosteuerungsmodelle-data.pdf>, Oktober 1998
- [EZB 2008] EZB: *The new euro area yield curves*. In: *ECB Monthly Bulletin* (2008), Februar, S. 95–103
- [Föllmer u. Schied 2002] FÖLLMER, Hans ; SCHIED, Alexander: *Stochastic Finance: An introduction in discrete time*. Walter de Gruyter, 2002
- [Franke u. a. 2011] FRANKE, Jürgen ; HÄRDLE, Wolfgang K. ; HAFNER, Christian M.: *Statistics of Financial Markets - An Introduction*. Third Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011
- [Gilli u. a. 2010] GILLI, Manfred ; GROSSE, Stefan ; SCHUMANN, Enrico: *Calibrating the Nelson–Siegel–Svensson model*. <http://comisef.eu/files/wps031.pdf>, March 2010

- [Lütkepohl u. Krätzig 2004] LÜTKEPOHL, Helmut ; KRÄTZIG, Markus: *Applied Time Series Econometrics*. Cambridge University Press, 2004
- [Manganelli u. Engle 2001] MANGANELLI, Simone ; ENGLE, Robert F.: Value at Risk models in finance. In: *ECB Working Paper Series* (2001), August, Nr. 75
- [Nymand-Andersen 2018] NYMAND-ANDERSEN, Per: Yield curve modelling and a conceptual framework for estimating yield curves: evidence from the European Central Bank's yield curves. In: *Statistics Paper Series* (2018), Februar, Nr. 27
- [Ross 2015] ROSS, Gordon J.: Parametric and Nonparametric Sequential Change Detection in R: The cpm package. In: *Journal of Statistical Software* 66 (2015), August, Nr. 3
- [Rubin u. a. 2018] RUBIN, Heinz ; BUDDENDICK, Christian ; GEISSMANN, Daniel: *Ableitung optimaler Zinsrisikostراتيجien im Negativzinsumfeld in der Schweiz*. ZEB.THEMEN, Juni 2018
- [Sievi u. a. 2001] SIEVI, Christian ; WEGNER, Olaf ; SCHUMACHER, Matthias: Szenarien der wertorientierten Steuerung des Zinsänderungsrisikos. In: *Betriebswirtschaftliche Blätter* 50 (2001), Januar, Nr. 3, S. 138–146
- [Sparkasse Westmünsterland 2017] SPARKASSE WESTMÜNSTERLAND: *Offenlegung gemäß CRR zum 31.12.2016*. [https://www.sparkasse-westmuensterland.de/content/dam/myif/spk-westmuensterland/work/dokumente/pdf/unternehmensinformationen/offenlegungsbericht\\_2016.pdf?n=true](https://www.sparkasse-westmuensterland.de/content/dam/myif/spk-westmuensterland/work/dokumente/pdf/unternehmensinformationen/offenlegungsbericht_2016.pdf?n=true), 2017
- [Svensson 1994] SVENSSON, Lars E.: Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994 / National bureau of economic research. 1994. – Forschungsbericht
- [Tsay 2002] TSAY, Ruey S.: *Analysis of Financial Time Series*. Wiley Series in Probability and Statistics, 2002
- [Tukey 1977] TUKEY, John W.: *Exploratory Data Analysis*. Addison-Wesley, 1977

## C Implementierung

Die der Arbeit zu Grunde liegenden Berechnungen sind in der Programmiersprache R implementiert. Zur Validierung der Ergebnisse der Zeitreihenanalyse wird außerdem die Statistiksoftware Stata verwendet. Die Implementierung ist in mehrere Module unterteilt, die sich an der inhaltlichen Gliederung dieser Arbeit orientieren. Diese sogenannten „Quantlets“ sind entsprechend der nachfolgenden Gliederung bezeichnet. Die zu verarbeitenden Daten sind, wie in Kapitel 3 beschrieben, Zinssätze der Europäischen Zentralbank.

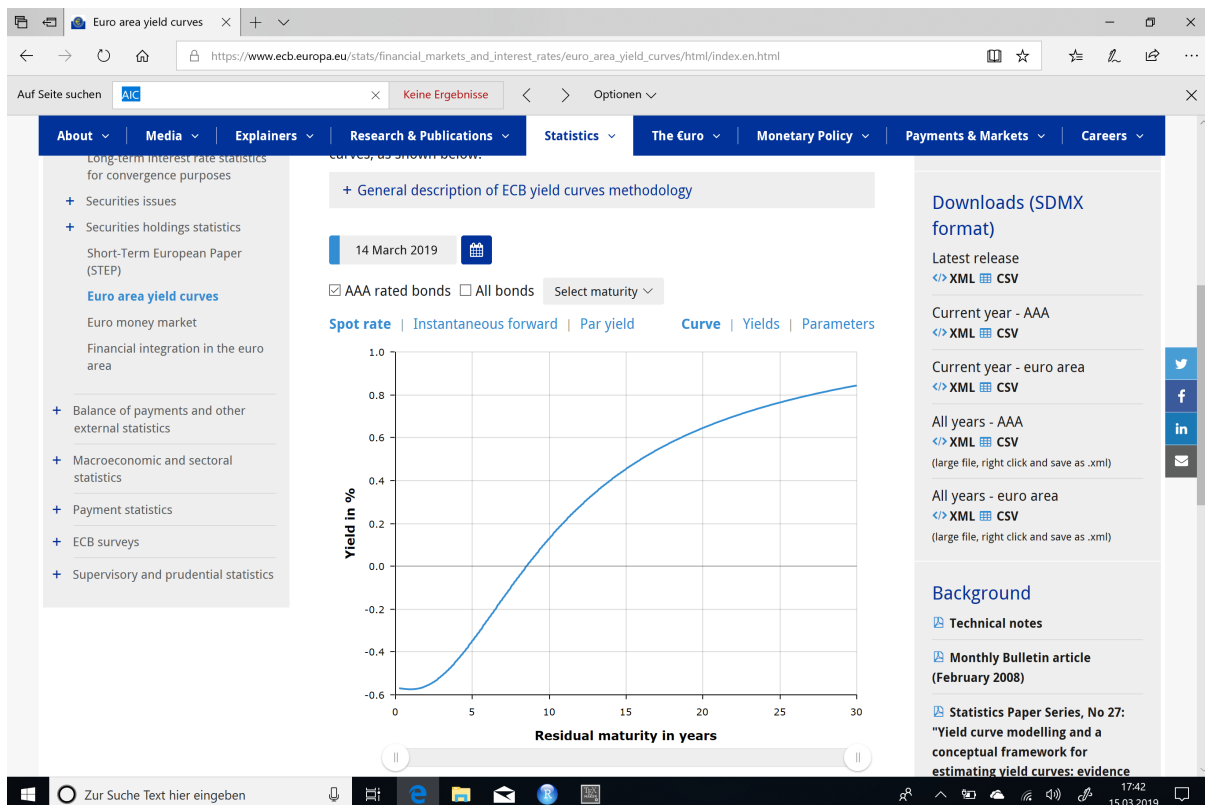


Abbildung 28: EZB-Seite<sup>128</sup> zur Bereitstellung der „Euro area yield curves“

0. **Vorbereitung:** Nach dem Speichern der Quantlets ist das Quantlet Q0 auszuführen, das die im Weiteren benötigte Verzeichnisstruktur anlegt. Im Unterordner `./Daten` sind danach die von der Internetseite der EZB<sup>128</sup> herunterzuladenden Dateien wie folgt abzulegen:

- **Current year - AAA:** als „data - aaa - current year.csv“
- **All years - AAA:** als „data - aaa - all years.csv“

1. **Datenaufbereitung:** In dieser Prozedur werden beide Dateien mit EZB-Zinsen eingelesen und zusammengesetzt. Danach werden für die Bewertung des GI10 relevanten Spot Rates extrahiert und aufbereitet, außerdem wird der GI10 bewertet und der entsprechende Index gebildet. Die

<sup>128</sup>[https://www.ecb.europa.eu/stats/financial\\_markets\\_and\\_interest\\_rates/euro\\_area\\_yield\\_curves/html/index.en.html](https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html)

aufbereiteten Spot Rates sowie die Barwerte und Indexpreise der Spot Rates werden zur weiteren Verarbeitung als csv- bzw. dta-Dateien abgespeichert.

2. **Zeitreihenanalyse:** Im zweiten Schritt erfolgt die Zeitreihenanalyse für den GI10-Index dieser Arbeit in R. Diese ist gemäß des inhaltlichen Vorgehens in Abschnitt 4.2 dieser Arbeit in drei Schritte aufgeteilt:

- (a) **ARMA-Modell:** Hier wird ein passendes Modell für die (bedingten) Erwartungen der Logrenditen des GI10 bestimmt. Zuerst werden die Stationaritätstests der Logpreise und der Logrenditen ausgeführt. Danach werden die vorgegebenen ARMA-Modelle geschätzt und miteinander verglichen sowie ihre Residuen auf serielle Abhängigkeiten getestet.
- (b) **ARCH-Effekte:** Auf Grundlage der Ergebnisse aus 2a) ist ein Kandidatenmodell vorzugeben, das auf Heteroskedastizität getestet wird. Die Ergebnisse geben Aufschluss darüber, ob ein Modell für die (bedingte) Volatilität zu suchen ist und welche Ordnung dieses gegebenenfalls haben sollte.
- (c) **ARMA+GARCH-Modell:** Auf Grundlage der Ergebnisse aus 2b) ist gegebenenfalls ein ARMA+GARCH-Kandidatenmodell zu formulieren, das in diesem Schritt mit normal- und Student-t-verteilterm Rauschen geschätzt und überprüft wird. Die Modellschätzung erfolgt dabei mit Hilfe der Funktion `ugarchfit`.

Zur Validierung der Ergebnisse wird die Zeitreihenanalyse auch in Stata vorgenommen. Die Berechnung kann mit der Datei `Q2_Zeitreihenanalyse_GI10.do` nachvollzogen werden. Die Schätzung des GARCH-Modells erfolgt mittels Aufruf der Funktion `arch`. Die Verteilungsannahme wird beim Aufruf durch `distribution(t)` oder `distribution(normal)` vorgegeben.

3. **Volatilitätsanalyse:** In diesem Schritt wird die bedingte Volatilitätsschätzung aus 2c) analysiert. Das erfolgt auf zwei unterschiedlichen Wegen gemäß der in den Abschnitten 4.3.1 bzw. 4.3.2 beschriebenen Methoden:

- (a) **Gleitende Durchschnitte:** Die Methode gleitender Durchschnitte wird zur Glättung der bedingten Volatilitätsschätzung angewendet. Anschließend werden lokalen Maxima der geglätteten Zeitreihen bestimmt. Sowohl die Glättung als auch die Bestimmung der lokalen Maxima erfolgt durch selbst definierte Funktionen.
- (b) **Volatilitätsclusterung:** Zunächst werden die Zeitreihen der bedingten Volatilitätsschätzung und der Logrenditen des GI10 dahingehend überprüft, ob sie die Voraussetzungen für das Change Point Model (CPM) erfüllen. Mittels CPM werden Strukturbrüche in der Verteilung der Logrenditen identifiziert und als Grenzen von Volatilitätsclustern betrachtet. Zur Bewertung der Volatilitätscluster werden die Kriterien aus Abschnitt 4.3.2 angewendet.

4. **Risikoberechnung historischer Daten:** Aus den in Schritt 1) zusammengestellten Spot Rates werden die gespiegelten (RS) und ungespiegelten (OS) Zinsszenarien generiert. Danach wird für alle Methoden bzw. Parametrisierungen an allen Stichtagen das Risiko ermittelt, indem aus

den Spot Rates und den Zinsszenarien die Diskontfaktoren sowohl für den jeweiligen Auswertungstichtag als auch für alle historischen Szenarien berechnet werden. Zur Bestimmung der Szenariowerte wird damit jeweils die Zinsposition des „gleitenden Zehners“ bewertet. Anhand der Szenariowerte werden dann VaR und ES bestimmt. Für alle gerechneten VaR-Werte werden die Backtestingergebnisse einfach durch den Vergleich mit der P/L des Prognosezeitraums ermittelt. Für das Backtesting des ES werden die Tests 1 und 2 aus Abschnitt 5.3.3 ausgeführt. Da deren p-Werte simuliert werden, ist dieser Teil der Berechnung rechenintensiver. Mit jeweils 10000 Simulationen zur Ermittlung der p-Werte dieser Tests beträgt die Auswertungszeit für Schritt 4) auf dem für die Analyse verwendeten Rechner mehr als 20 Minuten. Eine wesentlich höhere Anzahl an Simulationen würde dabei Speicherplatzprobleme verursachen.

5. **Modellvergleich historischer Daten:** Einlesen und Aufbereiten der Ergebnisse aus Schritt 4) für Grafiken und Tabellen.
6. **Simulation fiktiver Pfade:** Die in Schritt 2c) geschätzten Modellparameter werden verwendet, um mit Hilfe der Funktion `ugarchpath` Pfade für die Logrenditen des GI10 zu simulieren. Die Logrenditen werden danach in Renditen umgerechnet. Da die anschließende Risikoberechnung für die simulierten Pfade sehr rechenintensiv ist, wird eine Partition vorgegeben, auf die die Simulationsergebnisse verteilt werden. Standardmäßig werden so 100 Dateien à 100 simulierten Pfaden = 10000 Pfade simuliert. In einer Exportdatei wird der Bearbeitungsstand aller Partitionen aufgelistet, damit die nachfolgende Berechnung in Schritt 7) jederzeit unterbrochen werden kann.
7. **Risikoberechnung fiktiver Pfade:** Für die in Schritt 6) simulierten Daten wird die VaR-Berechnung inklusive Backtesting vorgenommen. Dabei werden nacheinander alle Partitionen aus 6) abgearbeitet und der Bearbeitungsstand entsprechend vermerkt. So kann die Berechnung unterbrochen werden, ohne dass vollständig abgearbeitete Partitionen noch einmal durchlaufen werden. Ohne Unterbrechung dauert diese Prozedur auf dem für die Analyse verwendeten Rechner zwei bis drei Tage. Um die Berechnung zu beschleunigen, wird diese über die CPUs des verwendeten Rechners parallelisiert.
8. **Modellvergleich fiktiver Pfade:** Einlesen und Aufbereiten der Ergebnisse aus Schritt 7) für Grafiken und Tabellen.

Die übrigen Quantlets QA bis QF sind zum Nachvollziehen der hauptsächlichen Ergebnisse der Arbeit nicht notwendig. Sie ergänzen die beschriebenen Quantlets mit der Erstellung weiterer, in dieser Arbeit verwendeter Grafiken und Tabellen.



## **D Selbstständigkeitserklärung**

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig, nur unter Verwendung der aufgeführten Hilfsmittel angefertigt und noch nicht für andere Prüfungen eingereicht habe. Sämtliche Quellen, die unverändert oder abgewandelt wiedergegeben werden, sind als solche kenntlich gemacht.

Berlin, den 2. Mai 2019

Thomas Bricke